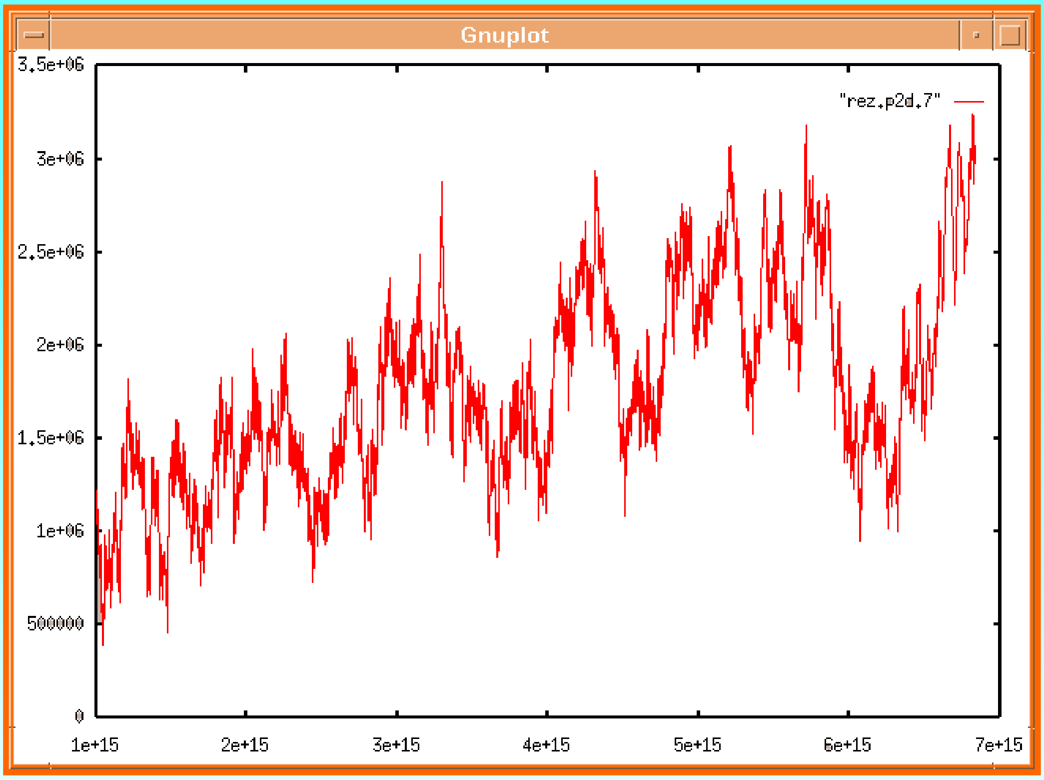
Sandro Emanuel Gomes Pereira Alves

O Teorema dos Números Primos (via função zeta)



Licenciatura em ensino de Matemática

I.S.E Julho de 2008

Sandro Emanuel Gomes Pereira Alves

O Teorema dos Números Primos (via função zeta)

Trabalho científico apresentado ao I.S.E para obtenção do Grau de Licenciatura em ensino de Matemática.

Orientador :

Prof. Doutor Paulino Lima Fortes

I.S.E Julho de 2008

Departamento ciência Tecnologia

Trabalho do fim de curso:

O Teorema dos Números Primos (via função zeta)

Aprovado Pelos membros do júri, Homologado pelo conselho científico em ______, Julho de 2008

O júri:

____

____

____

Praia, aos _______ de _____________ de 2008

" Não é louco aquele que dá aquilo que não pode guardar
para ganhar aquilo que não pode perder"

(João José Dias)

"Aqueles que esperam pelo melhor têm muito mais chances
de obter o que desejam"

(Norman Vicent Peal)

"Um dos principais deveres do homem é cultivar a amizade
dos livros."

(Thomas Carlyle)

"O melhor de se poder escrever é a certeza de que,
quem ler irá reflectir, criticar e depois escrever melhor."

(Autor desconhecido)

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Henrique e Maria, e à minha avó Adelina, Pelo amor, carinho, amizade e por tudo o que fizeram e ainda fazem por mim. Cada letra deste trabalho tem o vosso cunho a todos aos meus irmãos, pelas palavras de incentivo e apoio nos momentos mais difíceis.
À minha namorada Joana, pelo amor, paciência e amizade em todos estes anos e, acima de tudo, por ter acreditado sempre nas minhas potencialidades.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu bom e grande Deus, por ter colocado no meu caminho pessoas tão boas e prontas a ajudar-me. Agradeço ao Professor Doutor Paulino Fortes; meu amigo e orientador, pela atenção, valorização, incentivo, dedicação e por ter acreditado no meu potencial. Faltam palavras para lhe agracer. Ao meu amigo Victor Viera, pela disponibilidade e atenção. Agradeço, em geral, aos colegas da turma, pelas discussões, incentivo e trocas de referências para a realização deste trabalho.

A todos os que, directa ou indirectamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Índice

1 Breve historial sobre teorema de números primos **5**

2 As funções Gama e Zeta **9**

2.1 O lema da diferenciação 10

2.2 A Função Gama 14

2.2.1 Produto de Weierstrass 14

2.2.2 A transformada de Mellin 19

2.2.3 Fórmula de Lerch 32

2.3 Funções Zeta 35

3 O Teorema dos Números Primos **43**

3.1 Propriedades Analíticas Básicas da Função Zeta 44

3.2 O Lema Principal e a Sua Aplicação 50

3.3 Demonstração do Lema Principal 54

4 Conclusão **59**

5 Bibliografia **61**

6 Anexo **63**

INTRODUÇÃO

Na sequência do curso de Licenciatura em Ensino Matemática, está previsto a elaboração de um trabalho cientifico final sobre um determinado tema de acordo com conhecimento adquirido durante o curso; concernente a isso, elabora-se um trabalho cujo o tema é " O Teorema dos Números Primos via função zeta".

Seja n um número natural. Note-se d_n o conjunto dos divisores de n. Tem-se a

Definição 0.1 *Um número natural $n \neq 1$ é primo se $d_n = \{1, n\}$. Por convenção 1 não é primo.*

Uma das questões mais profundamente estudadas na aritmética é a distribuição dos números primos. Nos finais do Sec. XVII, Gauss e Legendre pensaram que os números primos menores ou iguais a um dado real $X \geq 2$ é mais ou menos $\frac{x}{\log x}$. Eles repararam este facto a partir de tabelas feitas à mão. Hadamard e De La Valée - Poussin provaram esse resultado em 1886.

$$\lim_{x - \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1,$$

onde $\pi(x)$ é um numero dos primos menores ou iguáis a x. A prova utiliza a função Zeta de Riemann e as técnicas de análise complexa, que usaremos ao longo do nosso trabalho. Esse teorema é conhecida por "Teorema de Números Primos". Os resultados que estabelecem a relação entre as propriedades dos zeros da função Zeta de Reimann e as propriadades de números primos, conduziram à ideia de que a análise complexa era o quadro natural para o estudo dos números primos. No entanto em 1945, Erdos e Selberg deram uma prova deste teorema utilizando apenas Ferramentas " elementares" de análise real. Os matemáticos viam deste modo que a análise real era suficientemente rica para abordar o teorema dos números primos.

$* * *$

Sabemos que o estudo dos números primos é uma das áreas com mais intensa investigação, tanto no contexto da matemática pura, como no da matemática aplicada ou suas aplicações, dado o grande número de problemas que ainda estão por resolver.

Com base nessas considerações, acima referidas, o suporte motivacional que justifica a escolha do tema proposto baseia-se em alguns aspectos fundamentais:

- Integração das matérias do curso;
- Desejo pessoal, em aprofundar os conhecimentos adquiridos durante a fase curricular de Licenciatura em Ensino da Matemática e abrir os meus horizontes de conhecimento em relação ao tema deste trabalho.
- Compreender e demonstrar o teorema dos números primos por uma via que achei muito interessante.

* * *

O presente trabalho encontra-se assim estruturado: para além da presente **Introdução**, ha mais 5 capítulos. No capítulo I- **Breve historial sobre números primos**, apresentamos a evolução histórica e os contributos de vários matemáticos ao longo da história da mesma. O objectivo desse capítulo é colocar o leitor perante vários teoremas sobre números primos e a tentativa de encontrar uma forma para ver se um número é ou não primo, sem porém demostrar os mesmos. O capítulo II - **As funções Gama e Zeta**, encotra-se assim estruturado por: o Lema da Diferenciação, A função Gama (Produto de Weierstrass, A Transformada de Mellin e Demonstração da Fórmula de Stirling), A fórmula de Lerch e Função Zeta. O objectivo deste capítulo é mostrar uma situação onde o caminho natural para definir as funções Gama e Zeta não é através das séries de potências mas através do integral dependente de um parâmetro. Apresentaremos uma condição natural sobre quando se pode diferenciar sobre o sinal do integral e poderemos então concluir, pelo o teorema de Goursat, que a função holomorfa assim definida é analítica; serão assim criadas todas as condições para demonstrar o teorema dos números primos via função zeta de Riemann. No capítulo III - **O Teorema dos Números Primos**, vamos finalmente responder a nossa questão de investigação "Como chegar ao teorema dos números primos via funções Zeta de Riemann?", utilizando algumas propriedades e ver as sua aplicação "Propriedades analíticas básicas da função zeta", vendo lema principal e suas aplicações. Esse capitulo tem como principal objectivo responder a nossa questão de partida. No capítulo IV - **Conclusão,** vamos falar um pouco das limitações encontradas durante a execução do trabalho e fazer um breve resumo do trabalho. No capítulo V- **Anexo**, aqui apresentamos a demonstração de alguns dos teoremas referidos no capitulo II, a fotografia do refirido matematico e a resolução de alguns exercícios referido no trabalho.

* * *

Tratando-se de uma investigação sobretudo bibliográfica, queríamos referir as principais obras que consultamos: em primeiro lugar o Complex Analysis de Serge Lang [3], para os aspectos da Análise Complexa. A maior parte deste trabalho é proveniente dessa obra; em segundo e terceiro lugar Algebraic Number Theory e Algebra, Adison Wesley [4], [1], ambos do mesmo autor, sobretudo para os aspectos algébricos, isto é, para tirar algumas dúvidas e ajuda para resolução de alguns problemas que aparecem no trabalho; em quarto lugar Análise de Fourier, Colecção Schaum [5], que foi consultado com muito proveito para a resolução de questões de análise, mais concretamente da função Gama; em quinto lugar, Real and Complex Analysis[2], de Walter Rudin, que serviu de apoio à resolução dos exercícios sobre a transformada de Laplace; e por ultimo mais não menos importantes, outras obras de referência e pesquisa bibliográfica através da *internet*, cujas referências encontram-se na bibliografia.

CAPÍTULO 1

Breve historial sobre teorema de números primos

Os números primos, e as suas propriedades, foram pela primeira vez estudados extensivamente pelos antigos matemáticos Gregos. Os matemáticos da escola de Pitágoras 500 a 300 A.C. estavam interessados nos números pelas suas propriedades numerológicas[1] e místicas. Entendiam a ideia de primalidade, e revelavam interesse em números perfeitos e amigáveis:

Definição 1.1 *Um número perfeito, é um número cujo resultado da soma dos seus divisores naturais é ele mesmo.*

Exemplo 1.1 *Por exemplo o número* 6 *tem como divisores* $1, 2, 3$ *e* $1 + 2 + 3 = 6$, 28 *tem como divisores* $1, 2, 4, 7, 14$ *e* $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Definição 1.2 *Um par de números amigáveis, é por exemplo* 220 *e* 284*, e são tais que, os divisores de um somam-se ao do outro e vice-versa.*

Quando os Elementos de Euclides apareceram cerca de 300 A.C. já muitos dos resultados importantes sobre números primos tinham sido provados. No livro IX D'Os Elementos, Euclides demonstra que o conjunto $\mathbb{P}$ dos números primos é infinito[2]. Trata-se de uma das primeiras demonstrações conhecidas a usar o método da contradição, com vista à obtenção de um resultado. Euclides dá-nos também, uma demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética:

---

[1] A *numerologia* é a pretensa ciência que deriva conhecimentos sobre o destino das pessoas através dos números.

[2] Anexo1- Demonstração do teorema e a fotografia de Euclides.

Teorema 1.1 *Qualquer inteiro pode ser escrito como produto de números primos de forma única, a menos da ordem dos factores*[3]*.*

Também mostrou que se um número da forma $2^n - 1$ é primo, então o número desta forma é um número perfeito.

O matemático Euler (1747) mostrou que todos os números pares perfeitos são desta forma . Não é conhecido até à data qualquer número perfeito ímpar.

A 200 anos A.C. o Grego Erastostenes apresentou um algoritmo para calcular números primos, o Crivo de Erastotenes. Segue-se depois um largo período de tempo de interregno, na História dos Números Primos, durante a chamada Idade Negra.

O seguinte desenvolvimento na História dos Números Primos, é-nos fornecido por Pierre de Fermat no início do século XVII. Este provou uma especulação conjecturada por Albert Girard, que diz que todo o número primo da forma $4n + 1$ pode ser escrito de um só modo como soma de dois quadrados e, foi capaz de nos mostrar que qualquer número pode ser escrito como soma de quatro quadrados. Criou um novo método para factorizar números primos grandes. Também provou o que é hoje conhecido como Pequeno Teorema de Fermat (para distinguir do denominado Grande Teorema de Fermat):

Teorema 1.2 *Seja* n *um número primo então para qualquer número inteiro* a*, tem-se que:* $a^p \equiv a\,(\mathrm{mod}\,.p)$ [4]*.*

Tal teorema prova em parte, o que foi chamado de Hipótese Chinesa, que data de cerca de 2000 anos antes, e que diz que um inteiro n é primo, se e só se o número $2^n - 2$ é divisível por n. A outra metade deste teorema é falsa; vê-se facilmente com o exemplo de que $2^{341} - 2$ é divisível por 341, e $341 = 31 \times 11$.

O Pequeno Teorema de Fermat, é a base de muitos resultados da Teoria dos Números, e de métodos conceptualizados com vista a determinação de números primos, que ainda hoje são utilizados em larga escala, em computação.Fermat correspondeu-se com outros matemáticos do seu tempo, e em particular com o monge Marin Mersenne. Numa das suas cartas a Mersenne, conjecturou que os números da forma $4^n - 1$, F^n (número de Fermat) são sempre primos, mas o resultado falha. Números desta forma são chamados

[3] Anexo1- Demonstração do teorema

[4] Anexo2 - Demonstração do pequeno teorema Fermat e a sua fotografia.

de números de Fermat e, só cerca de 100 anos mais tarde é que Euler demonstra que tal tem uma falha: $2^{32}+1 = 4294967297$ que é divisível por 641 e logo não é primo.

Os Números de Fermat da forma $2^n - 1$ também atraíram a atenção, devido à demonstração óbvia de que caso n não seja um número primo, então estes números são compostos, logo factorizáveis. Estes são vulgarmente chamados de Números de Mersenne M^n , devido ao estudo que este matemático lhe dedicou. Nem todos os números da forma $2^n - 1$ com n primo são números primos.

Por exemplo $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ é composto; no entanto tal não foi descoberto até cerca de 1536. Por muitos anos os números desta forma forneceram-nos os maiores números primos . O número M^{19} foi provado como sendo primo por Cataldi em 1588, e este foi o maior número primo por cerca de 200 anos, até que Lucas nos mostrou que M^{127} (que é um número que tem 39 dígitos) é primo; tal número foi o recordista até à era do computador electrónico. Em 1952 os números de Mersenne, M^{521} , M^{607}, M^{1279} , M^{2203} , M^{2281} são descobertos por Robinson com a ajuda dum primitivo computador electrónico, o que estabelece o inicio da era electrónica. Até à data da realização deste trabalho é conhecido um total de 37 Números Primos de Mersenne. O maior conhecido é $M^{3021377}$, que tem 909526 dígitos decimais.

O trabalho de Euler tem também um grande impacto na Teoria dos Números em geral, e na Teoria dos Números Primos em particular. Ele estende o Pequeno Teorema de Fermat e introduz a função-pi (π) de Euler.

Como mencionado já atrás, factoriza o quinto número de Fermat: $2^{32} + 1(F^n)$, descobre 60 pares de números amigáveis, e conjectura (mas não é capaz de provar) o que é conhecida como a Lei da Reciprocidade Quadrática.

É o primeiro a aperceber-se que a Teoria dos Números pode ser estudada usando as ferramentas da Análise, e em fazendo tal funda a Análise da Teoria dos Números. Mostra-nos que, não só a conhecida série harmónica ($\sum \frac{1}{n}$, com $0 \leq n \leq \infty$) é divergente, mas como a série harmónica com n é primo ($\sum \frac{1}{n}$, com $n \in N$, e n primo), também é divergente.

A soma dos n termos da série harmónica ($\sum \frac{1}{n}$, com $0 \leq n \leq \infty$) cresce logaritmicamente, enquanto a outra série diverge ainda mais lentamente como $\log(\log(n))$. Isto mostra que somando os inversos de todos os números primos, temos que o mais poderoso dos computadores modernos, nos dá como valor dessa soma cerca de 4, enquanto a série é divergente, isto é converge para infinito.

À primeira vista os números primos parecem não ter uma ordem especifica de aparecimento. Por exemplo em relação aos 100 primeiros números imediatamente antes de 10000000 existem apenas 9 números primos, enquanto nos 100 números que se seguem existem apenas 2 números primos. No entanto a uma ainda maior escala, a distribuição de números primos parece ser mais regular.

Legendre e Gauss fizeram ambos extensos cálculos sobre a densidade dos números primos. Gauss (que era um prodígio do cálculo) disse a um amigo que sempre que tinha 15 minutos de folga, os ocupava contando os números primos num alcance de 1000 números. No fim da sua vida estimou-se que Gauss tinha contado todos os números primos até 3 milhões.

Legendre e Gauss chegaram ambos à conclusão de que para um n grande a densidade de números primos perto desse mesmo n é semelhante $\frac{1}{\log(n)}$. Legendre deu uma estimativa para $\pi(n)$ dos números de primos relacionados com n de $\pi(n) = \frac{n}{((\log(n))} - 1,08366$ enquanto Gauss estimou isso mesmo em termos de integral logarítmico $\pi(n) = \int \frac{1}{\log(t)}\, dt$ (onde o alcance de integração é de 2 a n).

Pode ver-se a estimativa de Legendre e compará-la com a estimativa de Gauss.

A conjectura de que a densidade de números primos é $\frac{1}{\log(n)}$ é conhecida como o Teorema dos Números Primos.

Tentativas de a provar continuaram pelo século XIX a dentro com progressos notáveis por Chebyshev e Riemann que foram capazes de relacionar o problema com algo semelhante à chamada Hipótese de Riemann: uma conjectura ainda por demonstrar sobre os zeros no plano complexo, da função Zeta de Riemann. O Resultado foi eventualmente provado (usando poderosos métodos da Análise Complexa) por Jacques Hadamard e De La Vallée Poussin em 1896, como se referiu acima.

Mais recente é a descoberta feita em Agosto de 2002, quando o matemático indiano Manindra Agarwal, com dois dos seus alunos de pós-graduação, Nitin Saxena e Neeraj Kayal, do Instituto Indiano de Tecnologia em Kanpur, apresentou um algoritmo que é ao mesmo tempo rápido e com precisão absoluta "determinístico", sem nenhuma margem para erros; para determinar se um número é primo ou não.

Ainda há muitas questões por desvendar (algumas delas que datam de há centenas de anos atrás) relacionadas com números primos...

CAPÍTULO 2

As funções Gama e Zeta

Vamos agora para uma situação onde o caminho natural para definir uma função não é através das séries de potências mas através do integral dependente de um parâmetro. Apresentaremos uma condição natural sobre quando se pode diferenciar sobre o sinal do integral e poderemos então concluir, pelo o teorema de Goursat, que a função holomorfa assim definida é analítica.

Integraremos sobre intervalos. Mais concretamente vamos assumir que integramos no intervalo $[0, \infty[$. A função f definida neste intervalo é dito absolutamente integrável se o integral

$$\int_0^\infty |f(t)|\, dt$$

existe. Se a função é continua, o integral é definida naturalmente como o limite

$$\lim_{\beta \to \infty} \int_0^\beta |f(t)|\, dt$$

Também trabalharemos com integrais dependentes de um parâmetro. Isto significa que f é uma função de duas variáveis, $f(t, z)$, quando z está em algum domínio de $U \subset \mathbb{C}$. O integral

$$\int_0^\infty f(t, z)\, dt = \lim_{\beta \to \infty} \int_0^\beta f(t, z)\, dt.$$

é dito uniformemente convergente para $z \in U$,se dado ε,existir β_0 tais que $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2$, então:

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(t, z)\, dt \right| < \varepsilon.$$

O integral é absolutamente e uniformemente convergente para $z \in U$, se a mesma condição é válida substituindo $f(t,z)$ pelo seu valor absoluto $|f(t,z)|$.

2.1 O lema da diferenciação

Lema 2.1 *Seja I um intervalo de números reais, possivelmente infinito, seja U um conjunto aberto de números complexos. Seja $f = f(t,z)$ uma função continua em $I \times U$. Suponhamos que:*

i) Para um certo subconjunto compacto K de U o integral

$$\int_I f(t,z)\,dt$$

é uniformemente convergente para $z \in K$;

ii) Para cada t a função $z \to f(t,z)$ é analítica. Seja

$$F(z) = \int_I f(t,z)\,dt.$$

Então F é analítica em $U, D_2\ f(t,z)$[1] satisfaz a mesma hipótese que f, e

$$F'(z) = \int_I D_2 f(t,z)\,dt.$$

Dem. : Seja $\{I_n\}$ a sequencia do finito fechado no intervalo aumentado de I. Seja D um disco no plano $-z$. Cujo fecho está contido em U e seja γ a circunferência que limita D. Entao para cada z em D temos, pelas as formas de integrais de Cauchy:

$$f(t,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t,\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$$

pelo que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_I\int_\gamma \frac{f(t,\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma dt.$$

[1] $D_2\ f(t,z)$ é a derivada de f em ordem a z.

Se γ tem raio R, centro z_0 consideremos apenas os z tais que

$$|z - z_0| \leq \frac{R}{2}.$$

Então

$$\left|\frac{1}{\varsigma - z}\right| \leqq \frac{2}{R}.$$

Para cada n podemos definir

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{I_{(n)}}\int_\gamma \frac{f(t,\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma dt.$$

Tendo em conta a restrição imposta aos z acima, podemos trocar os integrais e obtemos

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\varsigma - z}\left[\int_{I_n} f(t,\varsigma)\,dt\right] d\varsigma.$$

Então F_n é analítica pelo teorema 1.2 do capitulo V pela hipótese, os integrais sobre I_n convergem uniformemente para o integral sobre I. Portanto F é analítica, sendo o limite uniforme das funções F_n , para $|z - z_0| \leq \frac{R}{2}$. Por outro lado, $F_n'(z)$ é obtida por diferenciação sob o sinal do integral da maneira usual, e converge uniformemente para $F_n'(z)$. Contudo

$$F_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{I_n} D_2 f(t,z)\,dt,$$

o que prova o teorema.□

Observemos que as hipóteses sob as quais o teorema é provado são ligeiramente mais fracas do que no caso real por causa da natureza peculiar da diferenciação de funções complexas cujas derivadas podem ser expressas como integrais.[2]

Exemplo 2.1 *Seja f uma função contínua com suporte compacto nos números reais*[3]*. Consideremos o integral*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{itz} dt$$

[2] Para o lema da diferenciação no caso real, veja-se, por exemplo, Serge Lang, Analise Real, capitulo XIV.4

[3] Suporte compacto significa que a função é igual a 0 fora de um conjunto compacto.

Seja $y_0 < y_1$ um número real. As função integranda para $y_0 < \operatorname{Im} z < y_1$ são da forma

$$f(t)\,e^{itz} = \quad f(t)\,e^{itx}e^{-ty}.$$

Temos $|e^{itx}| = 1$ enquanto e^{-ty} varia entre e^{-ty_1} e e^{-ty_0}. Como f tem suporte compacto, os valores de t para que $f(t) \neq 0$ são limitados. Portanto e^{itz} é limitado uniformemente para $y_0 < \operatorname{Im} z < y_1$. Assim o integral converge absulutamente e uniformente, para z satisfazendo essas desigualdades.

Diferenciando sob o sinal de integral temos

$$itf(t)\,e^{itz},$$

e de novo a função $itf(t)$ tem suporte compacto. Portanto, o mesmo argumento pode ser aplicado. De facto temos o limite uniforme

$$itf(t)\,e^{itz} \leqq |t|\,|f(t)|\,e^{ty_1}$$

que é independente de z nas regiões dadas. Portanto obtemos

$$F'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} itf(t)\,e^{itz}dt \qquad y_0 < \operatorname{Im} z < y_1$$

Como isto é verdade para todos as escolhas de y_0, y_1, concluímos que de facto F é uma função inteira.

Para sermos mais completos vamos apresentar o resultado similar para a continuidade, em vez da diferenciabilidade.

Lema 2.2 (Lema da continuidade) *Seja I um intervalo, U um conjunto aberto de números complexos, e $f(t,z)$ uma função contínua em $I \times U$. Assumindo que existe uma função φ em I, absolutamente integrável em I, e tal que para todo $z \in U$ tem-se*

$$|f(t,z)| \leqq \varphi(t)$$

então a função F definida por

$$F(z) = \int_t f(t,z)\,dt$$

é continua.

Dem.: É fácil por causa do lema da diferenciação (Cf. [la.83] do capitulo XIV).

Assim omitimos a demonstração, pois que ela recorre somente ao lema da diferenciação.

Exercício 2.1 *Para* $\operatorname{Re}(z) > 0$, *mostre que* ***(resolução em anexo)***

$$\log = \int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-zt}\right) \frac{dt}{t}$$

(Sugestão: mostrar que as derivadas de ambos os membros são iguais)

Exercício 2.2 (Transformada de Laplace) *Seja* f *uma função contínua com suporte compacto no intervalo* $[0, \infty[$. *Mostre que a função* Lf *dada por*

$$Lf(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt} dt$$

é inteira. ***(resolução em anexo)***

Exercício 2.3 *Encontre a transformada de Laplace das seguintes funções, e abcissa da convergência do integral que define a transformada de Laplace. Em cada caso* a *é um numero real* $\neq 0$. ***(resolução em anexo)***

a) $f(t) = e^{-at}$
b) $f(t) = \cos at$
c) $f(t) = \sin at$
d) $f(t) = \frac{\left(e^{t} + e^{-t}\right)}{2}$

Exercício 2.4 *Supondo que* F *é periódica com o período* $a > 0$,*e que* $f(t+a) = f(t)$ *para todo* $t \geqq 0$.*Mostre que*

$$Lf(z) = \frac{\int_0^a e^{-zt} f(t)\, dt}{1 - e^{-az}}$$

para $\operatorname{Re}(z) > 0$ ***(fica ao cuidado do leitor)***

2.2 A Função Gama

Há duas abordagens naturais para a função Gama: uma é via o produto de Weierstrass e a outra é pela via da transformada integral de Mellin. Algumas propriedades são imediatas a partir de uma definição, mas não da outra, e há também o problema de provar que as duas definições são equivalentes. Há várias vias para alcançar esses objectivos. Vamos seleccionar uma delas, começando com o produto de Weierstrass e suas consequências, que constituem as propriedades mais algébricas da função Gama.

2.2.1 Produto de Weierstrass

Seja γ a constante de Euler que é

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

Pela teoria geral do produto de Weierstrass, existe uma função inteira $g\left(z\right)$ cujos zeros são os inteiros negativos e 0,tendo o produto de Weierstrass

$$g\left(z\right) = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

Definimos a função Gama por $\Gamma\left(z\right)=\frac{1}{g(z)}$, portanto.

Proposição 2.1 Γ_1. $\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}}$

Assim a função Gama tem pólos de ordem 1 nos inteiros negativos. Recordemos de imediato a sua derivada logarítmica:

Proposição 2.2 Γ_2. $-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{g\prime(z)}{g(z)} = \frac{1}{z}+\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$

A constante de Euler é a única constante tal que o produto de Weierstrass para g satisfaz a propriedade

$$g\left(z+1\right) = \frac{1}{z}g\left(z\right).$$

e portanto a função Gama satisfaz a propriedade:

Proposição 2.3 Γ_3. $\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)}$

Para provar isso, seja $g_1(z) = z^{-1}g(z)$,de modo que $g_1(0) = 1$. Tomando as derivadas logarítmicas, aplicando Γ_2 encontramos imediatamente que

$$\frac{g\prime(z+1)}{g(z+1)} = \frac{1}{z+1} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{g_1\prime(z)}{g_1(z)}$$

Com efeito o termo $\frac{1}{z}$ desaparece na expansão do Mittag-Leffler de $\frac{g_1\prime(z)}{g_1(z)}$,e olhando para as somas parciais dessa expansão, encontraremos que elas diferem das somas parciais de $\frac{g\prime(z+1)}{g(z+1)}$ por um termo $\frac{1}{z+n+1}$ que tende para 0 quando n tende para ∞. Então há uma constante C tal que

$$g(z+1) = Cg_1(z)$$

Em $z = 0$ temos $g_1 = Cg_1(0) = C$, pelo que

$$C = e^{\gamma}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}$$

donde

$$\begin{aligned}\log C &= \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] \\ &= \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log(n+1) - \log n - \frac{1}{n}\right] \\ &= 0; \square\end{aligned}$$

como se pode ver, olhando para as somas parciais e usando a definição

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

Portanto $C = 1$ e está concluída a demonstração. Adicionalmente provamos que, para o inteiro positivos n nos também temos.

Proposição 2.4 $\mathbf{\Gamma}_4$. $\Gamma(n) = (n-1)!$ *e* $\Gamma(1) = 1$

A seguir vem a identidade.

Proposição 2.5 Γ_5.

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Para a demonstração notamos que, do produto de Weierstrass mais o exemplo 2.4 do capítulo X[4].

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = -\frac{\pi}{z\sin \pi z}$$

Usando Γ_3 e Γ_5 tem-se de imediato o resultado.

Fazendo $z = \frac{1}{2}$ e notando que $\Gamma(x)$ é positivo quando x é positivo, obtemos $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2_. = \pi$ e assim

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

De Γ_5 também obtemos o resíduo de Γ nos inteiros negativos, isto é

Proposição 2.6 Γ_6 *O resíduo de* Γ *em* $z = -n$ *para* $n = 0, 1, 2, ...$ *é* $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Para a demonstração, multiplicamos ambos os lados de Γ_5 por $(z+n)$ e usamos a forma da adição para senos, para encontrarmos

$$(z+n)\ \Gamma(z) = \frac{\pi(z+n)(-1)^n}{\sin(\pi z + n\pi)\,\Gamma(1-z)}$$

Podemos avaliar o segundo membro no ponto $z = -n$ como sendo $\frac{(-1)^n}{n!}$, e que portanto dá o resíduo do primeiro membro, como desejamos.

Temos também as seguintes relações, para cada inteiro positivo N, que às vezes é chamada a fórmula da multiplicação ou a relação de distribuição.

Definamos a função inteira

$$D(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(z)} = \sqrt{2\pi}g(z)\,.$$

Então tem-se

[4] ver o exemplo no capitulo X do livro:, Complex Analysis, Serge Lang.Graduate Texts in Mathematics, Second Edition. Springer- Verlag.

Proposição 2.7 Γ_7. $\boxed{\prod_{j=0}^{n-1} D\left(z+\frac{j}{N}\right) = D\left(Nz\right) N^{Nz-\frac{1}{2}}.}$

Por exemplo se $N=2$, encontraremos a fómula da duplicação

$$\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma\left(2z\right),$$

que permite-nos expressar valores de função gama em função de meios inteiros, em termos dos valores de gama nos inteiros.

Para provar a fórmula geral, a ideia principal é que o lado esquerdo e o lado direito da fórmula têm os mesmos números de zeros e pólos .

Assim o quociente é uma função exponencial de ordem 1, portanto o tipo AB^z,e tem-se que determinar A e B.

Naturalmente, existe uma parte computacional para prova, que vamos ver. Assim seja

$$\frac{\prod_{j=0}^{N-1}\Gamma\left(z+\frac{j}{N}\right)}{\Gamma\left(Nz\right)} = AB^z = h\left(z\right),$$

digamos.

Usando $\Gamma\left(z+1\right) = z\Gamma\left(z\right)$,repetidamente encontraremos

$$h\left(z+1\right) = \prod_{j=0}^{N-1}\frac{z+\frac{j}{N}}{Nz+j}h\left(z\right) = N^{-N}h\left(z\right)$$

.

Mas pela definição de h, também temos $h\left(z+1\right) = Bh\left(z\right)$,pelo que

$$B = N^{-N}$$

Resta determinar A. Podemos avaliar $\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(Nz)}$ em $z=0$,para encontrar N. Assim da definição de $h\left(z\right) = AB^z$ em $z=0$ obtemos

$$A = h\left(0\right) = N\prod_{j=0}^{N-1}\Gamma\left(\frac{j}{N}\right).$$

Em particular, $A > 0$, e isto basta para calcular A^2.Por Γ_4 encontramos

$$\begin{aligned}\left(\frac{A}{N}\right)^2 &= \prod_{j=1}^{N-1}\Gamma\left(\frac{j}{N}\right)\Gamma\left(1-\frac{j}{N}\right) = \pi^{N-1}\prod_{j=1}^{N-1}\left(\sin\frac{\pi j}{N}\right)^{-1} \\ &= (2\pi i)^{N-1}\prod_{j=1}^{N-1}\left(e^{\frac{i\pi j}{N}} - e^{-\frac{i\pi j}{N}}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Mas

$$\prod_{j=1}^{N-1}\left(e^{\frac{i\pi j}{N}} - e^{-\frac{i\pi j}{N}}\right) = \prod_{j=1}^{N-1} e^{\frac{i\pi j}{N}} \prod_{j=1}^{N-1}\left(1 - e^{-\frac{2i\pi j}{N}}\right) = i^{N-1}N$$

usando algumas identidades algébricas simples. Com efeito usamos

$$\sum_{j=1}^{N-1} j = (N-1)\,\frac{N}{2}$$

e notamos que $e^{-\frac{2i\pi j}{N}}$ $(j = 1, ..., N-1)$,varia sobre todas as $N-\acute{e}simas$ raízes de unidade $\neq 1$. Por factorização

$$\prod_{\varsigma^N=1}(X-\varsigma) = X^N - 1$$

encontramos

$$\prod_{\substack{\varsigma^N=1\\ \varsigma\neq 1}}(X-\varsigma) = \frac{X^N-1}{X-1} = X^{N-1} + \quad X^{N-2} + ... + 1$$

Substituindo 1 por X no lado direito temos N. Então notamos que os i^{N-1} cancelam-se, pelo que $\left(\frac{A}{N}\right)^2 = \frac{(2\pi)^{N-1}}{N}$. Então a forma Γ_7 é deduzida.

Nota 2.1 *Formulamos Γ_7 com a função normalizada D para que as potências de π desaparecessem, por três razões: Primeira, o número de factores $\sqrt{2\pi}$ que ocorre é precisamente o número de factores do produto. Assim esses factores podem ser também incorporados, desde o início, na fórmula. Segunda razão é que se admite*

$$\varsigma(s,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^s}$$

e se supusermos que $\varsigma'(s,z)$ *denota as derivadas com respeito a* s*, então temos a formula de Lerch*

$$D(z) = \exp(-\varsigma'(0,z)).$$

Assim a normalizando $D(z)$ elimina geratriz de todas as constantes nesta fórmula de Lerch veja o corolário 2.1 em baixo.

A terceira razão é que quando z varia no conjunto dos números racionais, então o termo $N^{\frac{Nz-1}{2}}$ é uma pura raiz fracionária de um inteiro e não contém nenhum factor transcendente envolvendo π. Segundo uma conjuntura de Rohrlich apenas as relações multiplicativas de valores da função gama em números racionais (a menos de factores algébricos) são aqueles que se seguem formalmente de Γ_3, Γ_5 e a fórmula de multiplicação $\Gamma_{7.}$.

Assim vemos que a normalização $D(z)$, em vez de Γ_z, é melhor em vários aspectos. Essa normalização explicita a estrutura das relações envolvendo a função Gama de uma maneira mais clara de que quando uma constante aleatória aparece flutuando.

2.2.2 A transformada de Mellin

Numa outra abordagem, definamos:

Definição 2.1 Γ_8 $\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t}}$

Então este integral verifica a hipótese do lema 2.1, desde que

$$0 < a \leqq \operatorname{Re} z \leqq b$$

se

$$0 < a < b$$

são números reais.

Exercício 2.5 *Demonstre que o integral acima satisfaz a hipótese do lema referido e escreva explicitamente a derivada.*

Resolução: A demonstração é analogo ao exercício 2.2 (ver em anexo a resolucão), tomando $f(t) = t^{z-1}$ e e^{-t} no lugar de e^{-zt}.

Portanto $\Gamma(z)$ é uma função analítica no semi-plano complexo direito.

Definição 2.2 *Integrais como os da acima são chamados transformada de Mellin.*

Nota 2.2 *Escrevemos* $\frac{dt}{t}$ *porque esta expressão é invariante sob as translações multiplicativas, isto é: seja* f *uma função absolutamente integrável em* $0 < t < \infty$, *seja* a *um número positivo. Então*

$$\int_0^\infty f(at)\,\frac{dt}{t} = \int_0^\infty f(t)\,\frac{dt}{t},$$

o que se verifica trivialmente por mudança de variáveis.

Exemplo 2.2 *Mudando* t *por* nt, *em que* n *é um numero inteiro positivo, obtemos*

$$\frac{\Gamma_{(s)}}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nt} t^s \frac{dt}{t} \quad \textit{para} \quad \mathrm{Re}\,(s) > 0.$$

Somando sobre n, no exemplo acima, obtemos a Funçao Zeta de Riemann na variável complexa s:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{(s)}}{n^s}.$$

O integral de Mellin converge apenas para $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.

Vamos de seguida ilustrar uma técnica que nos permite ter o seu prolongamento analítico a todo plano complexo num contexto mais simples. Escrevemos o integral na forma.

$$\int_0^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t} = \int_0^1 e^{-t} t^z \frac{dt}{t} + \int_1^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$$

Agora observemos que o integral de 1 a ∞, define uma função inteira de z, digamos

$$H(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$$

porque o problema da convergência de t próximo de 0 já não se coloca. Para o outro integral

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$$

escrevemos a expansão em série de potências de e^{-t} em $t = 0$.

Exercício 2.6 *Justificar que se pode substituir o integral acima por uma série de potências, para*

$$Re\,(z) > 0.$$

Calculando o integral, encontra-se:

$$.P\,(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}.$$

Esta série converge uniformemente para z em qualquer subconjunto compacto do plano complexo não contendo 0 nem qualquer inteiro negativo. Assim

$$\Gamma\,(z) = P\,(z) + H\,(z)$$

da decomposição de Mittag-Leffler da função Gama em função das suas partes principais, e fornece uma forma para calcular a sua extensão meromórfica a todo $\mathbb{C}$.

Vamos continuar com a teoria geral da função Gama.

Integrando por partes prova-se facilmente que para todo x real maior que 0.

$$(*) \qquad \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n^x n!}{x\,(x+1)\ldots(x+n)}$$

para todo número inteiro $n \geqq 1$. Prova-se que

$$e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqq e^{-t} \text{ para } 0 \leqq t \leqq n$$

Assim

$$0 \leqq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqq t^2 \frac{e^{-t}}{n}.$$

Como o integral

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t} t^{x-1} dt$$

converge tem-se que, pode-se tomar o limite no lado esquerdo de $(*)$, obtemos para $x\,\mathrm{Re} > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma\,(x)\,,$$

pelo que se põe

$$g_n(z) = \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z}$$

então g_n é uma função inteira e para reais $z > 0$, encontramos.

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t}.$$

.

Da definição de $g_n(z)$, tem-se directamente

$$g_n(z) = z \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1+\frac{z}{k}\right) e^{\frac{-z}{k}}\right) e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}-\log n\right)}.$$

Da definição da constante de Euler, vemos agora que as funções g_n convergem uniformemente em todo o conjunto compacto para o produto de Weierstrass para a função g vista acima, e portanto, identificamos a definição da função Gama, obtida através da transformada de Mellin no semi-plano complexo direito com a definição obtida através do produto Weierstrass. Desse modo, o produto de Weierstrass dá o prolongamento analítico da transformada de Mellin a uma função moromórfica em todo plano. Além disso, obtemos também o valor limite para a função Gama, que é

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{g_{n(z)}},$$

ou, de outra forma tem-se:

Proposição 2.8 Γ_9

$$\Gamma(z) = \lim_{n-\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

uniformemente para z num conjunto que não contém 0, nem qualquer inteiro negativo.

Observe-se que a fórmula $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ também obtém-se directamente da transformada integral de Mellin, depois da integração por partes tomando $u = e^{-t}$ e $dv = t^{z-1}dt$.

Da expressão da transformada de Mellin podemos enunciar e demonstrar a fórmula de Gauss.

Proposição 2.9 Γ_{10} $\boxed{\frac{\Gamma\prime(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right) dt \quad para\ real\ \ (z) > 0}$

Demonstração:

Recordemos que

$$(1) \quad \log(z) = \int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{zt}\right) \frac{dt}{t} \text{ para } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Com efeito ambos os lados são funções analíticas em z. Podemos diferenciar sob o sinal do integral, encontrar $\frac{1}{z}$ em ambos os lados. Fazendo para cada lado $z = 1$ encontramos 0. De modo que ambos os lados são iguais.

Então, da derivada do logaritmo Γ_2 e utilizando a definição de constante de Euler tem-se directamente

$$\gamma = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{N} - \log N\right)$$

obtemos

$$(2) \ \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{N\to\infty} \left(\log N - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{z+n}\right)$$

usando (1), e

$$\frac{1}{z+n} = \int_0^\infty e^{-(z+n)t} dt,$$

temos

$$\log N - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{z+n} = \int_0^\infty \left[e^{-t} - e^{-Nt} - te^{-zt} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-nt}\right] \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left[e^{-t} - e^{-nt} - te^{-zt} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-Nt}}{1-e^{-t}}\right)\right] \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right) dt + \int_0^\infty e^{-Nt} \left(\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

Como

$$\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = 0\,(1) \text{ quando } t \to 0$$

segue-se imediatamente que se pode tomar o limite quando $N \to \infty$, sob o sinal do integral, tomado 0 como o limite, concluímos a demonstração da fórmula de Gauss.

De Γ_{10} obtém-se imediatamente:

Proposição 2.10 Γ_{11}

$$\gamma = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt$$

Proposição 2.11 Γ_{12}

$$\frac{\Gamma\prime(z)}{\Gamma(z)} = -\ \gamma + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1-e^{-t}} dt$$

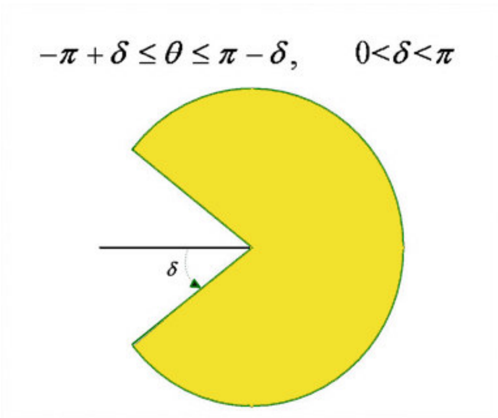
Estes são os teoremas principais da função Gama. Existe um resultado mais técnico e importante que descreve o desenvolvimento assimptótico: fórmula Stirling, abaixo

Proposição 2.12 Γ_{13}

$$log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \log(z) - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \int_0^{\infty} \frac{p_{1(t)}}{z+1} dt,$$

onde $p_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$ *é a função em dente de serra,* $[t]$ *denota o maior inteiro* $\leq t$.

Toma-se o valor principal do log, excluindo o eixo real negativo onde a função Gama tem os seus pólos. A utilidade de termo do erro envolvendo o integral de $p_1(t)$ é que este tende para 0 uniformemente em todo o sector dos números complexos $z = re^{i\theta}$ tal que.



onde $z = n$ é um inteiro positivo. Demonstra-se que

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\lambda}{12n}}$$

onde

$$|\lambda| \leq 1.$$

Como

$$n! = \Gamma(n+1),$$

vê-se que a relação assimptota.

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

é um caso especial de relação, válida para todo $|z| \to \infty$:

Proposição 2.13 Γ_{14}

$$\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}e^{-z}} \sqrt{2\pi},$$

Uniformemente no sector acima mencionado.

O sinal $\sim$ significa que o quociente do lado esquerdo pelo lado direito aproxima-se de 1, quando $|z| \to \infty$.

Demonstração: Da fórmula de Stirling

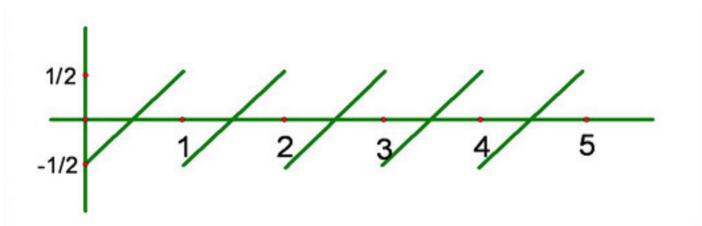
Precisamos de uma fórmula simples: a fórmula da soma de Euler.

Seja f uma função de classe C^1 real de variável real. Então

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(n) + f(0)) + \int_0^n p_1(t)\, f\prime(t)\,dt$$

Demonstração (da fórmula da soma de Euler)

Vejamos o gráfico da função em dente de serra, $p_1(t)$:



Note-se que

$$p_1\prime(t) = 1.$$

para t não inteiro. Integrando por partes com $u = p_1(t)$ e $dv = f\prime(t)\,dt$, tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{k-1}^{k} p_1(t)\, f\prime(t)\, dt &= p_1(t)\, f(t)\,|_{k-1}^{k} - \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left(f(k) + f(k-1)\right) - \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt\end{aligned}$$

fazendo a soma de $k = 1$ até $k = n$ e adicionando o integral $\int_0^n f(t)\,dt$ com $\frac{1}{2}(f(n) + f(0))$ resulta $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ no lado direito, o que demonstra a formula.

Antes de prosseguir e aplicando a fórmula da soma de Euler á função Gama, determinemos algumas constantes. A primeira constante não será utilizada na fórmula de Stirling, mas sim, na secção seguinte, e constitui um exemplo simples para a fórmula:

Lema 2.3

$$\frac{1}{2} + \int_0^{\infty} \frac{p_1(t)}{(1+t)^2} dt = \gamma$$

Demonstração:

Aplicando a fórmula de Euler à função $f(x) = \frac{1}{(1+x)}$, obtemos

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1} = \log(n+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + 1\right) + \int_0^{\infty} P_1(t)\, \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

Como P_1 é limitado, o integral à direita convergente absolutamente . Donde, após subtrairmos $\log(n+1)$ de ambos os lados, resulta o lema , por definição de γ.

Seja

$$p_2\ (t) = \frac{1}{2}\left(t^2 - t\right) \qquad \text{para} \qquad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Considere-se $p_2(t)$ estendido por periodicidade a todo $\mathbb{R}$ (período 1). Então $P_2(n) = 0$ para todos os inteiros n, e p_2 é limitado. Além disso

$$P_2\prime(t) = p_1(t).$$

Lema 2.4 *Para z não pertencente ao eixo real negativo, temos*

$$\int_0^\infty \frac{p_1(t)}{z+t}dt = \int_0^\infty \frac{P_2(t)}{(z+t)^2}dt.$$

O integral é analítico em z no conjunto aberto U obtido pela exclusão do plano do eixo real negativo, podendo-se diferenciar sob o sinal do integral no lado direito, como de costume.

Demonstração: Escrevemos

$$\int_0^\infty \frac{P_2(t)}{(z+t)^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{P_2(t)}{(z+t)^2}dt$$

intregando por partes em cada intervalo $[n, n+1]$ temos a identidade do lema. O integral envolvendo P_2 é absolutmente convergente, e o lema da diferenciação é aplicável.

Lema 2.5

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^\infty \frac{p_1(t)}{iy+t}dt = 0$$

Demonstração: O limite obtém-se imediatamente do lema 2.4. Aplicando agora a fórmula de Euler às funções.

$$f(t) = \log(z+t), \quad \text{e} \quad f(t) = \log(1+t),$$

E assumindo, de momento, que z é $real > 0$. Subtraindo as expressões na forma de Euler para estas duas funções e recordando que

$$\int \log x dx = x\log x - x,$$

obtemos

$$\begin{aligned} log\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!(n+1)} &= z\log(z+n)+n\log(z+n)-z\log z \\ &-(z+n)+z+\frac{1}{2}(\log(z+n)+\log z) \\ &-(n+1)\log(n+1)+(n+1) \\ &-1-\frac{1}{2}\log(n+1)\,\square \end{aligned}$$

mais os termos envolvendo os integrais de $P_1(t)$.

Escrevemos

$$z\log(z+n)=z\log n\left(1+\frac{z}{n}\right)=z\log n+z\log\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

Como $z\log n$, $M=\log n^z$ e $n+1$ aparece no denominador da esquerda, passando $-log(n+1)$ da esquerda para direita, mudam-se os sinais.

Fazendo também tantos cancelamentos quantos possíveis no lado direito, tem-se

$$-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

entre outras expressões. Mas, da expansão de Taylor para n muito grande (com z fixo) sabemos que

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e

$$\log\left(1+\frac{z}{n}\right)=\frac{z}{n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Portanto, é fácil calcular o limite a medida em que n tende para o infinito e obtiver através de $\Gamma_{9,}$

$$(**)\quad log\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log(z)-z+1+\int_0^\infty\frac{p_{1(t)}}{1+t}dt\;-\;\int_0^\infty\frac{p_{1(t)}}{z+t}dt$$

Tudo é válido para z real positivo. Pelo lema 2.4 o integral no lado direito é analítico em z , para z no conjunto aberto U igual ao plano sem o eixo real negativo como as outras expressões

$$log\Gamma(z),\qquad z\log z,\qquad \log z,\qquad z$$

são analíticas em U (que é simplesmente conexo) segue-se que a fórmula $(**)$ é valida para todo z em U.

Vejamos, agora a constante

Lema 2.6

$$1+\int_0^\infty \frac{p_{1(t)}}{1+t}dt=\frac{1}{2}\log 2\pi$$

Demonstração: De

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=\frac{-\pi}{z.\sin\pi z}$$

obtemos

$$|\Gamma(iy)|=\sqrt{\frac{2\pi}{y\left(e^{\pi y}-e^{-\pi y}\right)}}$$

de $(**)$,obtemos

$$\begin{aligned}
1+\int_0^\infty \frac{p_{1(t)}}{1+t}dt &= \operatorname{Re}\left\{\log\Gamma(iy)-\left(iy-\frac{1}{2}\right)\log(iy)+iy+\int_0^\infty \frac{p_{1(t)}}{iy+t}dt\right\} \\
&= \lim_{y\to\infty}\left\{\log|\Gamma(iy)|+\frac{1}{2}\log y+\frac{\pi y}{2}\right\} \text{ [por lema2.5]} \\
&= \lim_{y\to\infty}\log\sqrt{\frac{2\pi y e^{\pi y}}{y\left(e^{\pi y}-e^{-\pi y}\right)}} \\
&= \frac{1}{2}\log 2\pi\square
\end{aligned}$$

o que demonstra a fórmula de Stirling.

Observe-se que diferenciando sob o sinal do integral envolvendo P_2, resulta um bom termo de erro para $\frac{\Gamma\prime(z)}{\Gamma(z)}$,a saber

Proposição 2.14 Γ_{15}

$$\frac{\Gamma\prime(z)}{\Gamma(z)}=\ logz\ -\frac{1}{2z}+2\int_0^\infty \frac{P_2(t)}{(z+t)^3}dt$$

Nota 2.3 *Para integrar por partes, mais do que uma vez, é mais prático fazer* $P_2(t)=\frac{1}{2}\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}B_2(t)$ *,onde* B_2 *é o segundo polinómio de Bernouli, e assim por diante.*

Proposição 2.15 *(Formula de inversão de Mellin) para $x > 0$ tem -se*

$$e^{-x} = \int_{\sigma=\sigma_0} x^{-1}\Gamma(s)\,ds,$$

Onde $s = \sigma + it$,e o integral é tomado sobre a recta vertical com a parte real fixa $\sigma_0 > 0$,e $-\infty < t < \infty$.

Exercício 2.7 *Prove que:* ***(resolução em anexo)***

a) $\frac{\Gamma\prime(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$.

b) $\frac{\Gamma\prime(2)}{\Gamma(2)} = -\gamma + 1$

Exercício 2.8 *Prove que* ***(fica ao cuidado do leito)***

$$\int_0^\infty e^{-t}\log t dt = -\gamma$$

Exercício 2.9 *Seja a, b números reais > 0. define-se* ***(fica ao cuidado do leito)***

K1.

$$K_s(a,b) = \int_0^\infty e^{-\left(a^2t+\frac{b^2}{t}\right)}t^s\frac{dt}{t}$$

prove que K_s é uma funçao inteira de s. Prove que

K2.

$$K_s(a,b) = \left(\frac{b}{a}\right)^s K_s(a,b),$$

onde para $c > 0$ define-se

K3.

$$K_s(c) = \int_0^\infty e^{-c\left(t+\frac{1}{t}\right)}t^s\frac{dt}{t}$$

Prove que

K4.

$$K_s(c) = K_{-s}(c).$$

K5.

$$K_{\frac{1}{2}}(c) = \sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{-2c}$$

[Sugestão: diferencie o integral para $\sqrt{x}k_{\frac{1}{2}}(x)$ *sob o sinal de integral]. Seja* $x_0 > 0$ *e* $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$. *Mostre que existe um numero* $c = c(x_0, \sigma_0, \sigma_1)$ *tal que se* $x \geqq x_{0,}$ *então*

K6.

$$K\sigma(x) \leqq ce^{-2x}$$

Prove que

K7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(u^2+1)^s} du = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)}$$

para $R(s) > \frac{1}{2}$.*Prove também que*

K8.

$$\Gamma(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}}{(u^2+1)^s}\, du \;=\; 2\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{s-\frac{1}{2}} k_{s-\frac{1}{2}}(x)$$

para $R(s) > \frac{1}{2}$.

Exercício 2.10 *Define-se a variação da transformada de Laplace da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *como sendo*

$$L_1 f(w) = \Phi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\left(w-\frac{1}{2}\right)t} dt$$

a) seja $f(t) = e^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)t}$ *para* $t \geqq 0$ *e* $f(t) = 0$ *para* $t < 0$. *Mostre que* ***(resolução em anexo)***

$$\Phi(w) = \frac{1}{z-w} \qquad \textit{para } \operatorname{Re}(w) < \operatorname{Re}(z)$$

b) seja $f(t) = t^{s-1}e^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)t}$ *para* $t \geqq 0$ *e* $f(t) = 0$ *para* $t < 0$. *Mostre que*

(resolução em anexo)

$$\Phi(w) = \Gamma(w)(z-w)^{-s} \qquad \textit{para } \operatorname{Re}(w) < \operatorname{Re}(z)$$

aqui $(z-w)^s$ *é definida tomando* -$\frac{\pi}{2} < \arg(z-w) < \frac{\pi}{2.}$

2.2.3 Fórmula de Lerch

Vamos estudar as funções Zeta no próximo parágrafo. Porém vamos dar aqui apenas uma continuação da técnica usada para derivar a fórmula Stirling com vista a obter uma fórmula importante devido a Lerch, que diz respeito à função Gama.

Seja $U > 0$.Introduzimos a função Zeta de Hurwitz

$$\varsigma(s,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^s}$$

Trata-se de uma série absolutamente convergente e que define uma função analítica para $\operatorname{Re}(s) > 1$.Em particular, fazendo $u = 1$ obtém-se a função Zeta de Riemann:

$$\varsigma(s) = \varsigma(s,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Teorema 2.1 *Para* $\operatorname{Re}(s) > -1$, *obtém-se um prolongamento analítico de* $\varsigma(s,u)$ *dado por*

$$\varsigma(s,u) = \frac{u^{1-s}}{s-1} + \frac{u^s}{2} - s\int_0^{\infty} \frac{P_{1(t)}}{(t+u)^{s+1}} dt.$$

Demonstração. Primeiro, para $\operatorname{Re}(s) > 1$,aplicamos a fórmula da soma de Euler à função

$$f(t) = \frac{1}{(t+u)^s}.$$

Escrevemos a seguir a formula do somatório com um número finito de termos $\sum f(k)$,com $1 \leqq k \leqq n$, e depois fazemos n tender para o infinito. Os integrais na fórmula de Euler convergem uniformemente e a formula do teorema 2.1 aparece, excepto que ainda se tem $\operatorname{Re}(s) > 1$. Contudo, agora que se tem a fórmula neste domínio para s, nota-se que a oscilação do integral no lado direito envolvendo P_1, tal como no lema 2.4, é uniformemente convergente para $\operatorname{Re}(s) > -1$, dando deste modo o prolongamento analítico de $\varsigma(s,u)$ nesse domínio maior. Mais ainda, pelo lema 2.1 pode-se diferenciar sob o sinal do integral, de modo que se encontra uma forma para encontrar a derivada nesse domínio maior.

Para cada valor fixado de de U, é agora fácil encontrar os primeiros poucos termos do desenvolvimento em série de $\varsigma(s,u)$ na origem. Pomos

$$D(u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u)}$$

e notamos $O(s^2)$ uma função analítica divisível por s^2 próximo de $s=0$.

Teorema 2.2

$$\varsigma(s,u) = \frac{1}{2} - u - (\log D(u))\, s + O\left(s^2\right).$$

Demonstração. Usamos a série geométrica para $\frac{1}{s-1} = -\frac{1}{1-s}$ e usamos $u^{-s} = 1 - s\log u + O\left(s^2\right)$. O integral à direita na fórmula do teorema 2.1 é uma função holomorfa em $s=0$ e o seu valor em $s=0$ é obtido substituindo $s=0$. Encontra-se

$$\varsigma(s,u) = -u(1-s\log u)(1+s) + \frac{1-s\log u}{u} - s\int_0^\infty \frac{P_1(t)}{t+u}dt + O\left(s^2\right).$$

A fórmula apresentada no teorema 2.2 é então uma consequência da formula de Stirling Γ_{13}.

Denotemos por $\varsigma(s,u)$ a derivada com respeito a s. Tem-se o

Corolário 2.1

$$\varsigma(s,u) = -\frac{1}{2}\log 2\pi \qquad e \qquad \varsigma(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1).$$

Demonstração. Para a primeira expressão, faça-se $u=1$ no teorema 2.2; para a segunda escreve-se $s = s-1+1$ à frente do integral do teorema 2.1. Então o termo constante γ aparece aplicando o lema 2.3, terminando assim a demonstração.

Corolário 2.2 ***Fórmula de Lerch***

$$\log D(u) = -\ \varsigma(0,u)$$

ou, completamente em termos da função Gama,

$$log\Gamma(u) = \varsigma\prime(0,u) - \varsigma'(0).$$

Demonstração. Imediata a partir do desenvolvimento em série de potências do teorema 2.2 e do valor de $\varsigma'(0)$ no corolario 2.1.

Nota 2.4 *Poderia-se ter substituído* $U > 0$, *por um complexo* z *com* $\mathrm{Re}(z) > 0$.*As fórmulas convergem neste caso. Além disso,* $\log \Gamma(z)$ *é analítica para* z *no plano excluindo a semi recta* $]-\infty, 0]$, *e pelo corolário 2.1 vê-se que a formula de Lerch é válida se* u *for substituído por* z *neste domínio aberto. Definido o produto regularizado*

$$D(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u)}$$

obtêm-se a formula de Lerch para a variável complexa z, *nomeadamente,*

$$\log D(u) = - \quad \varsigma\prime(0, u).$$

Este é o caso mais clássico e mais elementar do formalismo geral concernente ao produto regularizado e determinante, que aparece em muitos contextos, na física inclusive.[5]

Exercício 2.11 *Para cada número real* x, *faça-se* $\{x\}$ *ser um único número tal que* $x - \{x\}$ *é um inteiro e* $0 < \{x\} \leq 1$.*Seja* N *um inteiro positivo. Prove a fórmula da adição (relação de destribuição)*

$$N^{-s} \sum_{j=0}^{N-1} \varsigma\left(s, \left\{x + \frac{j}{N}\right\}\right) = \varsigma(s, N_x)$$

[5] O trabalho de Voros [V0.87], apresenta uma abordagem incluindo vários exemplos de equações diferenciais parciais clássicas. Veja-se especialmente a secção 4, desse trabalho, concernente às funções Zeta sobre determinantes funcionais. Para mais, ver [Jol.92].

[Vo.87]A .Voros , Funções espectrais, funções especiais e funções Zeta de Selberg, Commun Math. Phys 110(1987) pp 439-467.

[Jol.93] J.Jorgenson e C Lang. Análise basicamente série e produto regularizados, Lecture Notes in Mathematics1564.Springer-Verlag,1993.

O trabalho de Voros [V0.87], apresenta uma abordagem incluindo vários exemplos de equações diferenciais parciais clássicas. Veja-se especialmente a secção 4, desse trabalho, concernente às funções Zeta sobre determinantes funcionais. Para mais, ver [Jol.92].

[Vo.87]A .Voros , Funções espectrais, funções especiais e funções Zeta de Selberg, Commun Math. Phys 110(1987) pp 439-467.

[Jol.93] J.Jorgenson e C Lang. Análise basicamente série e produto regularizados, Lecture Notes in Mathematics1564.Springer-Verlag,1993.

Desta fórmula e do teorema 2.2, deduza outras demonstrações para a fórmula da multiplicaçao da função Gama.

2.3 Funções Zeta

Nesta secção vamos ocupar-nos das funções Zeta, seus prolongamentos analíticos a todo plano, e a equação funcional. Prioritariamente vamos considerar funções Zeta de Hurwitz introduzidas na secção anterior, nomeadamente para $u > 0$

$$\varsigma(s,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^s} \qquad \text{analítica para } \operatorname{Re}(s) > 1$$

Em particular, fazendo $u = 1$ obtêm-se a função Zeta de Riemann.

$$\varsigma(s) = \varsigma(s,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Expressemos, agora, as funções Zeta de Riemann e Hurwitz como transformada de Mellin. Temos

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} \quad \text{para } \operatorname{Re}(s) > 0 \\ &= \int_0^\infty e^{-(n+u)t} (n+u)^s t^s \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

após a realização da mudança multiplicativa de variáveis $t \to (n+u)t$, o que deixa o integral invariante. Portanto dividindo ambos os lados por $(n+u)^s$ e somando, obtemos para $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\Gamma(s)\varsigma(s,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{(n+u)^s} = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+u)t} t^s \frac{dt}{t}.$$

Mas

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+u)t} = \frac{e^{-ut}}{1-e^{-t}}.$$

Portanto, fazendo

$$G_u(z) = \frac{e^{-uz}}{1-e^{-z}}$$

obtemos

$$\Gamma(s)\varsigma(s,u) = \int_0^\infty G_u(t)\, t^s\, \frac{dt}{t},$$

pelo que a função Zeta vezes a funçao Gama é a transformada de Mellin de G_u.

Fazendo

$$F_u(z) = \frac{e^{uz}}{e^z - 1}.$$

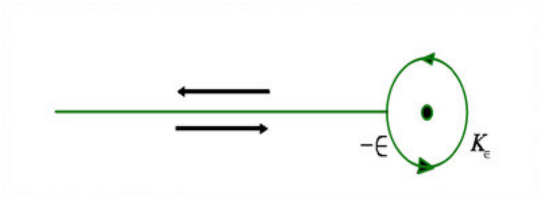
Então

$$G_u(-z) = \frac{e^{uz}}{1 - e^z} = -\, F_u(z)\,.$$

Introduzimos estas funções para obter um prolongamento analítico da função Zeta a uma função meromorfa a todo plano $\mathbb{C}$ através do integral de Henkel

$$H_u(s) = \int_C F_u(z)\, z^s \frac{dz}{z},$$

onde o integral é tomado no contorno de C como se mostra na figura, na qual k_ϵ é um pequeno círculo de raio ϵ em torno da origem.



Como usualmente, $z^s = e^{s\log z}$, e o log é tomado no seu valor principal no plano complexo excepto o eixo real negativo. Simbolicamente escrever-se

$$\int_C = \int_{-\infty}^{\epsilon} + \int_{k\epsilon} + \int_{-\epsilon}^{-\infty}$$

Mas a função integranda no primeiro e no último integral pode não ser a mesma, correspondendo aos dois valores de z^s que diferem por uma constante. O decrescimento da exponencial da função integranda e do lema 2.3, mostra logo que H_u é uma função inteira (completa) de s. Ver-se-á que daí resulta o prolongamento analítico para $\varsigma(s,u)$,e, potanto também, para a função Zeta de Riemann fazendo $u = 1$.

Teorema 2.3

$$H_u(s) = -\left(e^{i\pi s} - e{-}^{i\pi s}\right)\Gamma(s)\varsigma(s,u) = -2i\sin(\pi s)\Gamma(s)\varsigma(s,u).$$

Demonstração:
Mudamos a variável, fazendo $z = -w$. Escrevendo $G = G_u$, $F = F_u$,obtém-se

$$\begin{aligned} H_u(s) &= e^{-i\pi s}\int_\infty^\epsilon F(-w)\, e^{s\log w}\frac{dw}{w} + \int_{-k_\epsilon} F(-w)\, e^{s\log(-w)}\frac{dw}{w} \\ &\quad + e^{i\pi s}\int_\epsilon^\infty F(-w)\, e^{s\log w}\frac{dw}{w} \end{aligned}$$

donde, tomando o limite quando $\epsilon \to 0$,(ver lema abaixo) obtém-se

$$\begin{aligned} H_u(s) &= e^{-i\pi s}\int_0^\infty G(t)\, t^s\,\frac{dt}{t} + e^{i\pi s}\int_0^\infty G(t)\, t^s\frac{dt}{t} \\ &= -\left(e^{i\pi s} - e{-}^{i\pi s}\right)\int_0^\infty G(t)\, t^s\frac{dt}{t}\Box \end{aligned}$$

o que prova o teorema não provando contudo o

Lema 2.7 *Se* $\operatorname{Re}(s) > 1$, *então*

$$\int_{-k_\epsilon} G(w)\, e^{s\log(-w)}\frac{dw}{w} \to 0 \quad com\ \epsilon \to 0$$

Demonstração. O comprimento de K_ϵ e $\left|\frac{dw}{w}\right|$ tem um produto limitado. Mas fazendo $r = |z|$ e $\sigma = \operatorname{Re}(s)$, obtem-se

$$e^{s\log(z)} \ll e^{\sigma\log(r)} = r^\sigma,$$

e

$$G(z) \ll \frac{1}{r} \text{ para } r \to 0$$

o que prova o lema.$\Box$

Nota 2.5 *Do teorema 2.3 o facto de H_u ser uma função inteira e o facto de os zeros da* $\sin \pi s$ *nos inteiros negativos e* 0 *cancelarem os pólos de* $\varsigma(s)$ *nesses inteiros, vemos que* $\varsigma(s)$ *é holomórfica nesses mesmos inteiros. Determinemos os polos de* $\varsigma(s)$. *Antes de fazer isso, vamos determinar os valores* ς *nos inteiros negativos.*

Teorema 2.4 *Tem-se*

$$\varsigma(s,u) = -\frac{1}{2\pi i}\Gamma(1-s)\, H_u(s).$$

Em particular, se n é um inteiro positivo, então

$$\varsigma(1-n,u) = -\frac{1}{2\pi i}\Gamma(n)\, H_u(1-n)$$

e

$$\frac{\varsigma(1-n,u)}{\Gamma(n)} = -\text{ resíduo de } F_u(z)\, z^{-n} \text{ em } z = 0.$$

Em particular, notanto os números de Bernoulli por B_n, obtêm-se

$$\varsigma(1-n) = -\frac{1}{n}B_n$$

excepto para

$$\varsigma(0) = B_1 = -\frac{1}{2}.$$

Demonstração:

Observe-se que quando $s = 1-n$ no integral de Hankel, então a função integranda é uma função meromorfa, de modo que os integrais de $-\infty$ a $-\epsilon$ e $-\epsilon$ a $-\infty$ cancelam-se, ficando apenas o integral sobre K_ϵ.Aplica-se então a fórmula de Cauchy e obtemos o valor indicado. A afirmação sobre o valor da função Zeta nos inteiros negativos, vem imediatamente da definição dos números de Bernoulli em termos dos coeficientes de uma série de potências, a saber

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

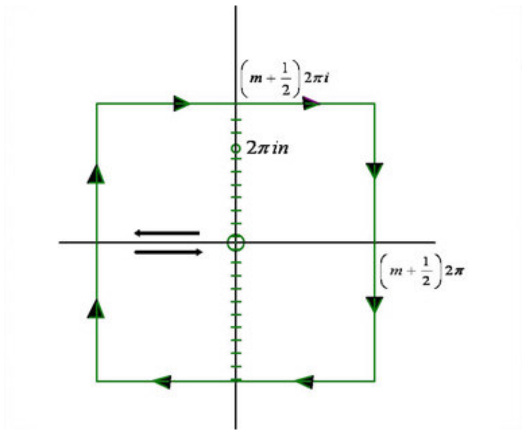
A seguir, observar-se-á a expressão para a função de Hankel que levará à equação funcional.

Teorema 2.5 *Para* $\operatorname{Re}(s) < 0$,*tem-se*

$$\begin{aligned} H_u(s) &= (-2\pi)^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi iun} e^{\frac{i\pi s}{2}} - e^{-2\pi iun} e^{-\frac{i\pi s}{2}}}{n^{1-s}} \\ &= (-2\pi)^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i \sin\left(2\pi un + \frac{\pi s}{2}\right)}{n^{1-s}}. \end{aligned}$$

Demonstração:

Seja m um inteiro $\geqq 2$ e D_m o caminho indicado na figura, consistindo do quadrado e da porção do plano $\mathbb{C}$ no interior do mesmo, com a orientação dada.



Deste modo, o quadrado intersecta os eixos nas metades dos múltiplos inteiros de $2\pi i$. Seja

$R_n = resíduo$ de $F_u(z)\, z^{s-1}$em $2\pi i$, $\quad n \neq 0, \quad -m \leqq n \leqq m.$

Então

$$\int_{D_m} F(z)\, z^s \frac{dz}{z} = -2\pi i \sum_{\substack{n=-m \\ n\neq 0}}^{m} R_n$$

.

para $n \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{i} e^{2\pi iun} (2\pi n)^s e^{\frac{i\pi s}{2}}, \\ R_{-n} &= \frac{1}{-i} e^{-2\pi iun} (2\pi n)^{s-1} e^{-\frac{i\pi s}{2}} \end{aligned}$$

Note-se que $\frac{F(z)}{z}$ é limitada no exterior do quadrado. Então se $\operatorname{Re}(s) < 0$,o integral de Hankel sobre o exterior do quadrado tende para 0, quando $m \to \infty$. Portanto

$$H_u(s) = \int_c F(z) z^s \frac{dz}{z} = \lim_{m\to\infty} \int_{D_m} F(z) z^s \frac{dz}{z}$$

donde resulta o teorema.

Aplica-se o teorema 2.5 à função Zeta de Riemann , fazendo $U = 1$. Então para $\operatorname{Re}(s) < 0$, obtém-se

$$H_1(s) = -(2\pi)^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\pi s}{2}} - e^{-\frac{i\pi s}{2}}}{n^{1-s}}$$

e portanto pelo lema 2.7

Teorema 2.6

$$\varsigma(s) = (2\pi)^s \Gamma(1-s) \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\pi} \varsigma(1-s)$$

Observa-se que a fórmula do teorema 2.6 foi derivada em primeiro lugar para $\operatorname{Re}(s) < 0$ pelo que as séries $\sum \frac{1}{n^{1-s}}$ são absolutamente convergentes. com tudo, sabe-se pelo teorema 2.3, que $\varsigma(s)$ é uma função meromorfa de s, de modo que, independementente da representação das séries em qualquer região do plano, a relação do teorema 2.6, é válida sem restrições para todo s, pelo prolongamento analítico. Pode-se reformular a equação funcional que relaciona $\varsigma(s)$ e $\varsigma(1-s)$ numa forma mais simétrica, como se segue:

Teorema 2.7

$$\textit{seja} \quad \varsigma(s) = s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \varsigma(s).$$

Então ς *é uma função inteira que satisfaz a equação funcional.*

$$\varsigma(s) = \varsigma(1-s).$$

A própria função Zeta é meromorfa, e holomórfa excepto num pólo simples em $s = 1$.

Demonstração:

O termo $s(s-1)$ permanece inalterado sob a transformação $s \rightarrow 1-s$. Que o factor

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\varsigma(s)$$

permanece inalterado é uma consequência imediata do teorema 2.6, usando as fórmulas

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin \pi s}$$

e

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=2\pi^{\frac{1}{2}}2^{-2s}\Gamma(2s).$$

O facto de $\varsigma(s)$ ser uma função inteira, e que $s=1$ é único pólo de $\varsigma(s)$, vamos ver a seguir. Do teorema 2.3 do que facto H_1 é inteira e que os zeros de $\sin(\pi s)\Gamma(s)$ ocorrem apenas nos inteiros positivos , vê-se que $\varsigma(s)$ pode ter pólos apenas nos inteiros positivos. Mas as séries $\sum \frac{1}{n^s}$ mostram que $\varsigma(s)$ é holomorfa para $Re(s) > 1$, pelo que o único pólo possível é em $s=1$. Do teorema 2.6 vê-se que $s=1$ é realmente um pólo de ordem 1, derivado do pólo de $\Gamma(1-s)$,uma vez que as outras expressões no lado direito da fórmula no teorema 2.6, são analíticas em $s=1$.Com Isso conclui-se a demonstração do teorema2.7 $\square$

Exercício 2.12 *a) Mostre que $\varsigma(s)$ tem zeros de ordem 1 nos inteiros negativos.*

b) Mostre que os outros zeros são tais que $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$.

c) Prove que os zeros de b tem realmente $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$

Exercício 2.13 *Defina $F(z)=\varsigma\left(\frac{1}{2}+iz\right)$.Prove que $F(z)=F(-z)$* ***(resolução em anexo)***

Exercício 2.14 *Seja c o contorno, como o mostrado na última figura. Então o caminho consiste em $]-\infty,-\epsilon]$, o círculo que denotamos por K_ϵ, e o caminho de $-\epsilon$ a $-\infty$. No plano do qual o eixo real negativo foi excluído, tira-se o valor principal para log e por complexo s,*

$$z^{-1}=e^{-s\log z}.$$

Os integrais envolverão z^s e os dois valores para z^s no primeiro e terceiro integrais diferirão por uma constante.

a) Prove que o integral

$$\int_c e^z z^{-s} dz$$

defina uma função inteira de s.**(fica ao cuidado do leito)**

b)Mostre que

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^z z^{-s} dz.$$

O integral do contorno fornece outro prolongamento analítico para $\frac{1}{\Gamma(s)}$ a todo o plano.**(resolução em anexo)**

c)Prove que para $\operatorname{Re}(1-s) > 0$ obtêm-se

$$\int_c e^z z^{-s} dz = 2i \sin \pi s \int_0^\infty e^{-u} u^{-s} du$$

(resolução em anexo)

CAPÍTULO 3

O Teorema dos Números Primos

No princípio do século XX, J. Hadamard e De La Vallee Poussin, de forma independente, demonstraram o teorema dos números primos, explorando a teoria das funções inteiras, que tinha sido desenvolvida por Hadamard. Aqui apresentaremos a demonstração de D.J. Newman, que é mais sintéctica, beneficiando-se também do trabalho de Korevaar.

A demonstração de Newman ilustra, ainda, várias técnicas de análise complexa: integrais de contorno, convergência absoluta de produtos num contexto diferente dos produtos de Weirstrass, e vários aspectos das funções inteiras num contexto clássico.

A função Zeta foi abordada no capítulo anterior, onde foi apresentado um método de demonstração da equação funcional e o prolongamento analítico a todo o plano através dos integrais de Hankel. Agora vamos considerar alguns resultados necessários de Análise Complexa e vamos assumir o teorema da factorização única dos inteiros em números primos (teorema fundamental da Álgebra).

Recordemos a notação: Se f, g são duas funções de variável x, definidas para todo o x suficientemente grande, e g uma função positiva, escreve-se

$$f = O\left(g\right)$$

para segnificar que existe uma constante de $C > 0$ tal que $\left|f\left(x\right)\right| \leqq Cg\left(x\right)$ para todo o x suficientemente grande. Portanto a função $f = O\left(1\right)$ significa que f é limitada para $x \geqq x_0$.

3.1 Propriedades Analíticas Básicas da Função Zeta

Seja s uma variável complexa. Para $\mathrm{Re}\,(s)\ > 1$, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge absoluta e uniformemente para $\mathrm{Re}\,(s)\ > 1+\delta$, com qualquer $\delta > 0$. Isso vê-se imediatamente estimando

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| \leqq \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

e recorrendo ao teste do integral para série real $\sum \frac{1}{n^{1+\delta}}$, que tem termos positivos.

Como se sabe, um número primo é um inteiro $\geqq 2$ que é divisível apenas por 1 e por si próprio. Por isso a sequência dos números primos é $2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, ...$

Teorema 3.1 *O produto*

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

é absolutamente convergente para $\mathrm{Re}\,(s)\ > 1$, *e uniformemente* $\mathrm{Re}\,(s)\ > 1 + \delta$ *com* $\delta > 0$ *e tem-se*

$$\varsigma\,(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Demonstração:

A convergência do produto é uma consequência imediata da definição e a mesma aproximação dada pela convergência da série da função Zeta acima . Na mesma região de $\mathrm{Re}\,(s)\ > 1 + \delta$, pode-se utilizar aproximações pelas séries geométricas para concluir que

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \frac{1}{p^{4s}} + ... = E_p\,(s)\,,$$

por exemplo.

Utilizando o facto básico da teoria elementar dos números segundo o qual todo inteiro positivo tem factorização única em números primos, a menos da ordem dos factores, conclui-se que no produto dos termos $E_p(s)$ para todos os primos p, a expressão $\frac{1}{n^s}$ ocorrerá exactamente uma vez, dando por isso as séries para uma função Zeta na região de $\mathrm{Re}(s) > 1$, concluindo assim a demonstração (de Euler).

O produto

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

é chamado produto de Euler. A representação da função Zeta como esse produto mostra que $\varsigma(s) \neq 0$,para $\mathrm{Re}(s) > 1$.Esta afirmação será refinada para o caso da recta $\mathrm{Re}(s) = 1$ no teorema[1].

No exercício 2.2 do capítulo anterior, deu-se um método para mostrar como a função Zeta se estende a uma função meromorfa no plano todo.

Teorema 3.2 *A função*

$$\varsigma(s) - \frac{1}{s-1}$$

estende-se a uma função holomorfa na região de $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Demonstração:

Para $\mathrm{Re}(s) > 1$,tem-se

$$\begin{aligned} \varsigma(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx. \end{aligned}$$

Estima-se cada termo na soma usando as relações

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f\prime(t)\, dt$$

[1] ver o teorema 1.3 do livro, Complex Analysis, Serge Lang.Graduate Texts in Mathematics, Second Edition. Springer- Verlag.

e então

$$| \ f(b) - f(a)| \leqq \max_{a \leqq t \leqq b} |f\prime(t)| \, |b-a| \, .$$

Portanto, cada termo é estimado da seguinte forma

$$\left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| \leqq \max_{n \leqq x \leqq n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| \leqq \max \left| \frac{s}{x^{s+1}} \right| \leqq \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}.$$

Logo a soma dos termos converge absolut e uniformemente para $\mathrm{Re}(s) > \delta$, o que conclui a demonstração do teorema $\square$.

Note-se que a função Zeta tem uma certa simetria no eixo dos **xx**, mais propriamente

$$\varsigma(\overline{s}) = \overline{\varsigma(s)}.$$

Isto é imediato a partir do produto de Euler e do desenvolvimento em série do teorema 3.2 Segue-se que se S_0 é um número complexo onde ς tem um zero de ordem m (que pode ser um polo, caso em que m é negativo) então o complexo conjugado $\overline{S}_0$ é um número complexo onde ς tem um zero da mesma ordem de m .

Define-se agora

$$\varphi(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \quad \text{e} \quad \Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s} \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

A soma que define $\Phi(s)$ converge uniforme e absolutamente para

$$\mathrm{Re}(s) > 1 + \delta$$

pelo mesmo argumento que para a soma que define a função Zeta. Usa-se simplesmente o facto que dado $\epsilon > 0$,

$$\log n \leqq n^{\epsilon}$$

para todo

$$n \geqq n_0(\epsilon)$$

Teorema 3.3 *A função* Φ *é meromorfa para* $\mathrm{Re}\,(s) > \frac{1}{2}$. *Além disso, para* $\mathrm{Re}\,(s) \geqq 1$, *tem-se* $\varsigma\,(s) \neq 0$ *e*

$$\Phi\,(s) - \frac{1}{s-1}$$

não tem polos para

$$\mathrm{Re}\,(s) \geq 1$$

Demonstração:

Para $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, o produto de Euler mostra que $\varsigma\,(s) \neq 0$. Por resultados de Análise Complexa temos

$$-\frac{\varsigma\prime\,(s)}{\varsigma\,(s)} = \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1}$$

usando a série geométrica tem-se o desenvolvimento

$$\frac{1}{p^s-1} = \frac{1}{p^s}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \frac{1}{p^s}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+...\right) = \frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+...$$

donde

$$(*) \qquad -\frac{\varsigma\prime\,(s)}{\varsigma\,(s)} = \quad \Phi\,(s) + \sum_p h_p\,(s) \text{ onde } |h_p\,(s)| \leqq \frac{\log p}{|p^{2s}|}$$

para alguma constante C. Mas a série $\sum\left(\frac{\log n}{n^{2s}}\right)$ converge absoluta e uniformemente para $\mathrm{Re}\,(s) \geq \frac{1}{2}+\delta$, com $\delta > 0$, por isso o teorema 3.2 e $(*)$ implicam que Φ é meromorfa para $\mathrm{Re}\,(s) > \frac{1}{2}$,e tem um polo em $s = 1$ e nos zeros de ς, sem outros polos nesta região.

Fica apenas para ser provado que ς não tem zeros na recta $\mathrm{Re}\,(s) = 1$, supondo que ς tem um zero de ordem m em $s = 1 + ib$ com $b \neq 0$. Seja n a ordem do zero em $s = 1 + 2ib$. Então $m, n \geqq 0$, pelo teorema 3.2. De $(*)$ tem-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\Phi\,(1+i\varepsilon) = 1 \quad , \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\Phi\,(1+\varepsilon \pm ib) = -m \quad , \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\Phi\,(1+\varepsilon \pm 2ib) = -n.$$

Com efeito, se uma função meromorfa $f(z)$ tem a factorização

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z) \text{ com } h(z_0) \neq 0, \infty$$

então

$$\frac{f\prime(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} +$$

os termos holomorfos em z_0, donde os nossos três limites seguem-se imediatamente das definições e do pólo da fungao Zeta em 1, com residuo 1.

A identidade seguinte é facilmente verificada

$$\begin{aligned} & \Phi(s + 2ib) + \Phi(s - 2ib) + 4\Phi(s + ib) + 4\Phi(s - ib) + 6\Phi(s) \\ = & \sum_p \frac{\log p}{p^{2s}} \left(p^{\frac{ib}{2}} + p^{-\frac{ib}{2}}\right)^4. \end{aligned}$$

Para $s = 1 + \varepsilon > 1$ vê-se que a expressão acima é $\geqq 0$. Usando os nossos limites, conclui-se que

$$-2n - 8m + 6 \geqq 0,$$

quando $m = 0$. Isto conclui a demonstração do teorema 3.3. $\square$

É conveniente ter uma expressão integral para Φ.

Proposição 3.1 *Para* $\operatorname{Re}(s) > 1$,*tem-se*

$$\Phi(s) = s \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}} dx$$

Proposição 3.2 *Sejam* f, g *duas funções definidas nos inteiros* > 0,*e* $\leqq n + 1$.*assuma-se que* $f(n+1) = 0$. *Seja* $G(k) = g(1) + ... + g(k)$.

$$\sum_{k=1}^n f(k) g(k) = \sum_{k=1}^n (f(k) - f(k+1)) g(k).$$

Exercício 3.1 *Prove a expressão do integral para* Φ *na proposição 3.1* ***(resolução em anexo)***

Exercício 3.2 *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência de números complexos tais que* $\sum a_n$ *é convergente. Seja* $\{b_n\}$ *uma sequência crescente de números reais, isto é,* $b_n \leqq b_{n+1}$ *para todo o* n*, e* $b_n \to \infty$ *quando* $n \to \infty$*. Prove que*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{b_N} \sum_{n=1}^{N} a_n b_n = 0.$$

Será que essa conclusão é ainda válida se se assumir que as somas parciais de $\sum a_n$ *são limitadas?* ***(fica ao cuidado do leitor)***

Exercício 3.3 *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência de números complexos. Assuma-se que existe um número complexo* C *e* $\sigma_1 > 0$*, tal que*

$$|a_1 + ... + a_n| \leqq C n^{\sigma_1} \text{ para todo } n$$

Prove que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *converge para* $\operatorname{Re}(s) > \sigma_1$.

[sugestão: utilize soma por partes] . **(fica ao cuidado do leitor)**

Exercício 3.4 *Prove o seguinte teorema:*

Exercício 3.5 *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência de números complexos e* A_n *a sequência das somas parciais*

$$A_n = a_1 + ... + a_n.$$

Seja $0 \leqq \sigma_1 < 1$*, e assuma-se que existe um número complexo* ρ *tal que para todo* n *se tem*

$$|A_n - n\rho| \leqq C n^{\sigma_1}$$

ou por outras palavras $A_n = n\rho + O(n^{\sigma_1})$*. Então a função* f*, definida pela série de Dirchelet,*

$$f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s} \qquad \text{para } \operatorname{Re}(s) > 1$$

tem um prolongamento analítico à região $\operatorname{Re}(s) > \sigma_1$*, onde é analítica excepto para um polo simples com resíduo* ρ *em* $s = 1$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{sugestão: considerar } f(s) - p\varsigma(s) \text{, usar o teorema 3.2 e aplicar} \\ \text{o exercício 3.1} \end{array} \right].$$

(fica ao cuidado do leitor)

3.2 O Lema Principal e a Sua Aplicação

Agora vamos tratar dos conceitos da teoria dos números com propriedades analíticas. Vamos enunciar mais um teorema anaítico fundamental e mostrar a sua implicação ao teorema de número primos.

Teorema 3.4 *(Chebyshev)* $\varphi(x) = O\ (x)$.

Demonstração:
Seja n um inteiro positivo. Então

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_j \tbinom{2n}{j} \geqq \tbinom{2n}{n} \geqq \prod_{n<p<2n} p = e^{\varphi(2n)-\varphi(n)},$$

donde se obtém a inequação

$$\varphi(2n) - \varphi(n) \leqq 2n \log 2.$$

Mas se x é incrementado de 1, então $\varphi(x)$ incrementa no máximo de $\log(x+1)$, que é $O \log(x)$. Portanto, existe uma constante $C > \log 2$ tal que para todos $x \geqq x_0(C)$ tem-se.

$$\varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \leqq Cx.$$

Aplica-se esta inequação sucessivamente $x, \frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, ..., \frac{x}{2^r}$ e soma-se. Resulta que

$$\varphi(x) \leqq 2Cx + 0\,(1).$$

o que prova o teorema $\square$

Apresenta-se agora o lema principal, que constitui a parte delicada da demonstração. Seja f uma função definida nos números reais $\geqq 0$, e assume-se, por simplicidade, que f é limitada e contínua por partes. O que vamos provar é válido sob condições menos restritivas: em vez de contníua por partes, seria suficiente assumir que o integral

$$\int_a^b |f(t)|\, dt$$

existe para todo par de números $a, b \geqq 0$. associaremos a f a transformada de Laplace g definida por

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt} dt$$

para

$$\operatorname{Re}(z) > 0.$$

Poder-se-á então, aplicar do lema da diferenciação o capítulo III, cuja demonstração aplica-se a uma função f que satisfaz as condições dadas (contínua por parte e limitada). Conclui-se que g é analítica para $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Lema 3.1 *(lema principal) Seja f limitada, continua por partes nos reais $\geqq 0$. Seja $g(z)$ definida pela integral acima para* $\operatorname{Re}(z) > 0$*. Se g tem prolongamento a uma função analítica para* $\operatorname{Re}(z) \geqq 0$ *, então*

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ existe e é a } g(0)$$

Adia-se a demonstração do lema principal para a próxima secção, dando apenas a sua aplicação. Observe-se que a função φ é contínua por partes. De facto, ela é localmente constante: não há alteração em φ entre os números primos.

A aplicação do lema principal é na demonstração do

Lema 3.2 *O integral*

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x) - x}{x^2} dx$$

converge.

Demonstração:

Seja

$$f(t) = \varphi\left(e^t\right) e^{-t} - 1 = \frac{\varphi(e^t) - e^t}{e^t}$$

então f é certamente contínua por partes e limitada pelo teorema 3.4. Substituindo $x = e^t$ no integral pretendido, $dx = e^t dt$,vê-se que

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x) - x}{x^2} dx = \int_0^\infty f(t)\,dt.$$

Contudo é suficiente para provar que o integral à direita converge. Pelo lema principal, é suficiente para a prova, verificar que a transformada de Laplace de f é analítica para $\operatorname{Re}(z) \geqq 0$, pelo que se tem que calcular essa transformada.

Afirmamos que neste caso

$$g(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Uma vez provada essa fórmula, pode-se aplicar o teorema 3.2 para concluir que g é analítica para $\mathrm{Re}(z) \geqq 0$, concluindo, do mesmo modo, a demonstração do lema 3.2.

Efectuando agora $g(z)$, usa-se a fómula do integral da proposição 3.1. Por essa fórmula obtém-se

$$\frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{\varphi(x) - x}{x^{s+1}} dx$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} &= \int_1^\infty \frac{\varphi(x) - x}{x^{z+2}} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\varphi(e^t) - e^t}{e^{2t}} e^{-zt} e^t dt \\ &= \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt \end{aligned}$$

que dá a transformada de Laplace de f e termina a demonstração do lema 3.2$\square$.

Teorema 3.5 *Sejam f_1 e f_2 funções definidas para todo $x \geqq x_0$, para algum x_0. Diz-se que f_1 é asssimptota de f_2 e escreve-se*

$$f_1 \sim f_2$$

se e so se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$$

Teorema 3.6 *Tem-se*

$$\varphi(x) \sim x$$

Demonstração:

A asserção do teorema é logicamente equivalente à combinação das duas seguintes asserçôe. Dado $\lambda > 1$,o conjunto dos x tais que $\varphi(x) \geqq \lambda(x)$ é limitado; dado $0 < \lambda < 1$,o conjunto dos x tais que $\varphi(x) \leqq \lambda(x)$ é limitado.

Prove-se a primeira. Suponha-se que a primeira asserção é falsa. Então existem alguns $\lambda > 1$, tal que para um x arbitrariamente grande tem-se $\frac{\varphi(x)}{x} \geqq \lambda$. Como φ é monótona crescente, tem-se para tal x .

$$\int_x^{\lambda(x)} \frac{\varphi(t) - t}{t^2} dt \geqq \int_x^{\lambda(x)} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - t}{t^2} dt > 0$$

O número no extremo direito é independente de x. Como existem x arbitrariamente grandes que satisfazem a inequação acima, segue-se que o integral do lema 3.2. não converge, o que é uma contraditção. De modo que a primeira asserção fica provada.

A segunda asserção prova-se de igual modo. Seja $\pi(x)$ o número primo $\leqq x$.

Teorema 3.7 *(dos números primos) Tem-se*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

Demonstração:

Tem-se

$$\varphi(x) = \sum_{P \leqq x} \log P \leqq \sum_{P \leqq x} \log x = \pi(x) \log x$$

e dado $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{x^{1-t} \leqq P \leqq x} \log P \geqq \sum_{x^{1-t} \leqq P \leqq x} (1-\epsilon) \log x \\ &= (1-\epsilon) \log x \left[\pi(x) + 0\left(x^{1-\epsilon}\right)\right]. \end{aligned}$$

Usando o teorema 3.6 segundo o qual $\varphi(x) \sim x$, conclui-se a demonstração do teorema dos números primos $\square$.

3.3 Demonstração do Lema Principal

Recordemos o lema principal :

Seja f limitada, contínua por partes nos reais $\geqq 0$. Seja

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt} dt \quad \text{para } \operatorname{Re}(z) > 0$$

se g for extensível a uma função analítica para $\operatorname{Re}(z) \geqq 0$,então

$$\int_0^\infty f(t) \quad \text{existe e é igual a } g(0)\,.$$

Demonstração:

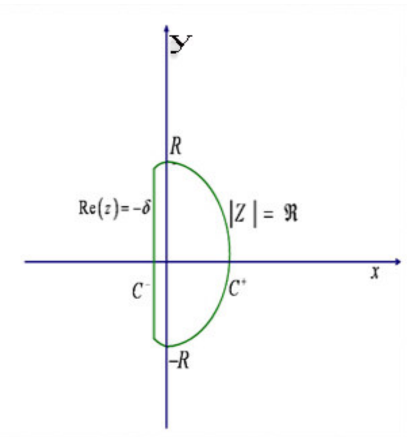
Para $T > 0$, define-se:

$$g_T(z) = \int_0^T f(t)\, e^{-zt} dt.$$

Então g_T é uma função inteira, como se vê diferenciando sob o sinal do integral. Temos que mostrar que:

$$\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0)\,.$$

Seja $\delta > 0$,e C o caminho constituído pelo segmento $\operatorname{Re}(z) = -\delta$, e o arco da circunferência $|z| = R$ e $\operatorname{Re}(z) \geqq -\delta$, como mostra a figura



Pela hipótese de que g tem o prolongamento a uma função analítica para $\operatorname{Re}(z) \geqq 0$, pode-se tomar δ suficientemente pequeno de modo g seja analítica na região limitada por C, e na sua fronteira. Então

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_c (g(z) - g_T(z))\, e^{\Gamma z}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_c H_T(z)\, dz$$

onde $H_T(z)$ é abreviatura da expressão sob o sinal do integral. Seja B um limite para f, isto é, $|f(t)| \leqq B$, para $t \geqq 0$.

Seja C^+o semi círculo $|z| = R$ e $Re(z) \geqq 0$.Então

$$(1) \qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} H_T(z)\, dz\right| \leqq \frac{2B}{R}$$

Demonstração:

Em primeiro lugar note-se que para $\operatorname{Re}(z) \geqq 0$, obtemos

$$|g(z) - g_T(z)| = \left|\int_T^\infty f(t)\, e^{-zt} dt\right| \leqq B\left|\int_T^\infty \left|e^{zT}\right|\right| dt = \frac{B}{\operatorname{Re}(z)} e^{-\operatorname{Re}(z)T}$$

e para $|z| = R$

$$\left|e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\right| = e^{\operatorname{Re}(z)T}\left|\frac{R}{Z} + \frac{z}{R}\right|\frac{1}{R} = e^{\operatorname{Re}(z)T}\frac{2\left|\operatorname{Re}(z)\right|}{R^2}.$$

Tomando o produto das duas últimas estimativas, e multiplicando pelo comprimento do semi círculo resulta um limite para o integral sobre o semi círculo e prova-se o pressuposto.

Seja C^- a parte do caminho C com $\operatorname{Re}(z) < 0$, queremos estimar

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c (g(z) - g_T(z))\, e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}.$$

Estima-se separadamente a expressão sob o integral com g e g_T.

Tem-se

$$(2) \qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c^-} g_T(z)\, e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\right| \leqq \frac{B}{R}$$

Demonstração:

Seja S^{-} o semi círculo com $|z| = R$ e $\operatorname{Re}(z) < 0$. Como g_T é inteira, pode-se substituir C^{-} por S^{-} no integral sem lhe alterar o valor. Porque a integranda não tem polos à esquerda do eixo dos yy.

Estime-se agora a expressão sob o sinal integral em S^{-}.Tem-se

$$|g_T(z)| = \left|\int_0^T f(t)\, e^{-zT} dt\right| \leqq B \int_0^T e^{-\operatorname{Re}(z)T} dt \leqq \frac{Be^{-\operatorname{Re}(z)T}}{-\operatorname{Re}(z)}.$$

Para o outro factor utiliza-se a mesma estimativa. Toma-se o produto das duas estimativas e multiplica-se pelo comprimento do semi círculo para se obter o limite desejada em (2).

Em terceiro lugar afirmamos que

$$(3) \qquad \int_c g(z)\, e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \to 0 \text{ quando } T \to \infty$$

Demonstração:

Pode-se escrever a expressão do integral da seguinte forma

$$g(z)\, e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} = h(z)\, e^{Tz}$$

onde $h(z)$ é independente de T.

Dado qualquer subconjunto compacto K da região definida por $\operatorname{Re}(z) < 0$, note-se que $e^{Tz} \to 0$, rápidamente e uniformemente para $z \in K$, quando $T \to \infty$.

A palavra "rapidamente" significa que a expressão dividida por qualquer potência de T^N, também tende para 0 uniformemente para z em K, quando $T \to \infty$. Daí a nossa afirmação decorre facilmente.

Pode-se, finalmente, provar o lema principal. Tem-se

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \lim_{T \to \infty} g_T(0)$$

se o limite existir .

Mas dado ϵ, toma-se R tão grande que $\frac{2B}{R} < \epsilon$. Então por (3), toma-se T tão grande que

$$\left|\int_{C^{-}} g\ (z)\, e^{Ts} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}\right| < \epsilon.$$

Então de (1), (2), e (3). tem-se $|g(0) - g_T(0)| < 3\epsilon$, o que prova o lema principal e o teorema dos numeros primos. $\square$

CAPÍTULO 4

Conclusão

Apesar de algumas dificuldades e alguns momentos de desânimo, motivado pela pressão e problema que ocasionalmente teimavam em aparecer, a realização desta investigação foi-nos extremamente útil e decisiva nesta etapa de formação. Este trabalho proporcionou-nos o enriquecimento do nosso conhecimento sobre os números primos.

Ao longo da feitura do trabalho fomos apercebendo da complexidade de alguns resultados, mas sobretudo da sua beleza e interesse. Assim, recomendamos aos estimados leitores que façam o mesmo que Gauss (que era um prodígio do cálculo) "disse a um amigo que sempre que tinha 15 minutos de folga, ocupava-os contando os números primos num alcance de 1000 números", isto é, só queremos dizer aos futuros leitores que invistam mais do seu tempo com números Primos, eles virão que valerá a pena, pois a muito para demonstrar e descubrir anida sobre os numeros primos.

Sendo este trabalho de natureza matemática, acabamos por revelar a penas a ponta do iceberg do assunto sobre o números primos. Foi uma pesquisa estimulante, apesar da sua extensão. Curiosidades, recordes e um pouco de misticismo númerico são alguns dos seus ingredientes que a tornaram interessante. Dentro do aspecto técnico, ainda restam muitas questões a serem respondidas que ocuparão por muito tempo aos Matemáticos.

$* * *$

Finalmente, resta-nos referir que o presente projecto representou para nós mais uma grande oportunidade de formação, para enriquecimento do conhecimento sobre número primos e, cosequentemente, o nosso conhecimento geral a nivel da matemática.

CAPÍTULO 5

Bibliografia

[**1**] Grillet, Algebra, Adison Wesley, Toronto, Canada, 2003.

[**2**] Rudin, W., Real and Complex Analysis, Third edition, McGraw-Hill, New York, 2000

[**3**] Serge Lang, Complex Analysis, Serge Lang.Graduate Texts in Mathematics, Second Edition. Springer- Verlag.

[**4**] Serge Lang, Algebraic Number Theory, Serge Lang.Graduate Texts in Mathematics, Second Edition. Springer- Verlag.

[**5**] Murray R. Spiegel, Análise de Fourier, Coleção Schaum. Editora McGauw-Hill do Brasil, LTDa

[**6**] www.somatematica.com - consultado no dia 22 de novembro de 2007-3h45mm

D.J. Newman´s, demostraçao simples do teorema de numeros primos,

Amer.Math.Monthly 87(1980)pp.693-696.

J.Korevaar, acerca do metedo rapido do Newman´s para o teorema de números primo, *Math.intell.* Vol 4 n^o 3 (1982) pp.108-115

[Vo.87]A .Voros , Funções espectrais, funções especiais e funções Zeta de Selberg, Commun Math. Phys 110(1987) pp 439-467.

[Jol.93] J.Jorgenson e C Lang. Análise basicamente série e produto regularizados, Lecture Notes in Mathematics1564.Springer-Verlag,1993.

O trabalho de Voros [V0.87], apresenta uma abordagem incluindo vários exemplos de equações diferenciais parciais clássicas. Veja-se especialmente a secção 4, desse trabalho, concernente às funções Zeta sobre determinantes funcionais. Para mais, ver [Jol.92] .

[Vo.87]A .Voros , Funções espectrais, funções especiais e funções Zeta de Selberg, Commun Math. Phys 110(1987) pp 439-467.

[Jol.93] J.Jorgenson e C Lang. Análise basicamente série e produto regularizados, Lecture Notes in Mathematics1564.Springer-Verlag,1993.

CAPÍTULO 6

Anexo

Anexo 1

Euclides Matimático Crego do sec. III (A.C);

Teorema 6.1 *existem infinitos números primos.*

demonstração: Suponhamos que o conjunto de numeros primos é finito, isto é, existe uma lista $P_1 = 2, P_2 = 3..., P_{r;}$ *de numeros primos. consideramos então o inteiro.*

$$P = P_{1.}P_2...P_r + 1$$

seja p um número primo divisor de P. *Ele não pode ser igual a um dos* P_i *porque se não ele seria divisor da diferença*

$$P - P_{1.}P_2...P_r = 1$$

o que é impossivel . então p é um numero primo que nao pertençe a lista $\square$.

Teorema 6.2 *Qualquer inteiro pode ser escrito como produto de números primos de forma única, a menos da ordem dos factores*

Demonstração:

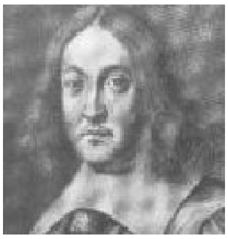
1- cada número primo pode ser considerado como produto que contem um só factor, por isso a afirmação do teorema é verdadeira para os números primos.

2 - supunhamos que a afirmação do teorema é verdadeira para todos os k tais que $2 \leq k < n$.Designemos por p um divisor positivo mínimo de n,que é um número primo. então, $n = pk\'$.se $k\' = 1$,então $n = p$ e a afirmação do teorema é verdadeiro. se $k\' > 1$, então $2 \leq k\' < n$.Pela suposição, $k\'$, e consequentemente, e n decompõe-se em produto de factores primos, i.e. neste caso a afirmação do teorema é verdadeira para todos os n.

3- Portanto, o teorema é verdadeira para todos números naturais $n \geq 2$ (pelo princípio da indução finita).

Anexo 2

Pierre de Fermat, matemático que viveu (1607-1665).



Teorema 6.3 *Seja n um número primo então para qualquer número inteiro a, tem-se que:* $a^p \equiv a \,(\mathrm{mod}\,.p)$.

Demonstração: por indução em a.

verefiquemos para $a = 1$.

$1^p = 1 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p)$ verdadeiro

Suponhamos por hipótese de indução que a congruencia é valida para $a = k$.isto é,

$k^p \equiv k \,(\mathrm{mod}\,.p)$

e mostremos a congruencia para $a = k + 1$ ou seja,

$(k+1)^p \equiv k+1 \,(\mathrm{mod}\,.p)$

$(k+1)^p = \sum_{i=0}^{p} C_i^p k^{p-i} = k^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1} C_i^p k^{p-i} \equiv k+1 \,(\mathrm{mod}\,.p)$

Pois os coeficentes binomias C_i^p com $1 \leq i \leq p-1$ são multiplos de p, assim $\sum_{i=1}^{p-1} C_i^p k^{p-i} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,.p)\,\square$.

Anexo 3

Resoluçao dos exercícios

exercício 2.1

Para $\mathrm{Re}\,(z) > 0$, mostre que

$$\log z = \int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-zt}\right) \frac{dt}{t}$$

Seja $F\,(z) = \log z = \int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-zt}\right) \frac{dt}{t}$

$F\,(z) = \log z \qquad (1)$

$F\,(z) = \left(e^{-t} - e^{-zt}\right) \frac{dt}{t} \qquad (2)$

Obs. mostrar que as derivadas de (1) e (2) são iguais.

$F'(z) = (\log z)' = \frac{1}{z}$

para mostrar que a derivada de (2) é igual a $\frac{1}{z}$ apliquemos o lema da deferenciação. a derivada da integranda em ordem a z é:

$D_2\left(\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{t}\right) = e^{-zt}$

$F'(z) = \int_0^\infty e^{-zt}dt = \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta e^{-zt}dt = \frac{1}{z}\square.$

Exercício 2.2

Mostre que a função Lf dada por

$$Lf\,(z) = \int_0^\infty f\,(t)\,e^{-zt}dt$$

Seja $x_0 < x_1$um número real. A função integranda para $x_0 < \mathrm{Re}\,(z) < x_1$,é da forma $f\,(t)\,e^{-zt} = f\,(t)\,e^{-(-x+iy)} = f\,(t)\,e^{-xt}e^{-iy}$ temos $|e^{-iy}| = 1$ enquanto e^{-xt} varia entre e^{-tx_1} e e^{-tx_0}.

como f é um suporte compacto, os valores de $t \in [0, \infty[$,então os valores de t tal que $f\,(t) \neq 0$ são limitadas. portanto e^{-zt} é limitado uniformemente para $x_0 < \mathrm{Re}\,(z) < x_1$. A derivada da função integranda é :

$-tf\,(t)\,e^{-zt}$;

e de novo a função $-tf\,(t)\,e^{-zt}$ tem suporte compacto , portanto, o mesmo argumento pode ser aplicado. pois obtemos limete uniforme.

$-tf\,(t)\,e^{-zt} \leq |t|\,|f\,(t)|\,e^{tx_1}$

que é independente de z nas regiões dadas, portanto obtemos

$f'(z) = \int_0^\infty -tf\,(t)\,e^{-zt}dt, \;\; x_0 < \operatorname{Re}(z) < x_1$

$x_{0,}\ x_1$ são arbitrarios concluimos que fé uma função inteira $\square$.

Exercício 2.3

a) $\qquad f\,(t) = e^{-at}$

A transformada de Laplace é dado por:

$$Lf\,(u) = \int_0^\infty f\,(t)\,e^{-ut}dt \iff Lf\,(u)\int_0^\infty e^{-at}.e^{-ut}dt = \int_0^\infty e^{-(a+u)t}dt = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta e^{-(a+u)t}dt = \lim_{\beta\to\infty}\left[-\tfrac{1}{a+u}e^{-(a+u)t}\right]_0^\beta = \lim_{\beta\to\infty}-\tfrac{1}{a+u}e^{-(a+u)\beta} + \lim_{\beta\to\infty}\tfrac{1}{a+u}e^{-(a+u)0} = \lim_{\beta\to\infty}\tfrac{e^{-(a+u)\beta}-1}{a+u} = \begin{cases} -\frac{1}{a+u} & \text{se } a+u>0 \\ \infty & \text{se } a+u<0 \end{cases} \quad \square$$

b e c)

$b)f\,(t) = \cos at \qquad\qquad c)g\,(t) = \sin at$

$Lf\,(u) = \int_0^\infty f\,(t)\,e^{-ut}dt$

consideremos a função $h\,(t) = e^{iat} = \cos at + i\sin at$,assim $f\,(t)$ é a parte real, $g\,(t)$ é a parte imaginaria de $h\,(t)$.

calculemos a transformação de Laplace de $h\,(t)$.

$$Lh\,(u) = \int_0^\infty f\,(t)\,e^{-ut}dt \iff Lh\,(u)\int_0^\infty e^{iat}.e^{-ut}dt = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\infty e^{(ia-u)t} = \lim_{\beta\to\infty}\left[\tfrac{1}{(ia-u)}e^{(ia-u)t}\right]_0^\beta = \lim_{\beta\to\infty}\tfrac{e^{(ia-u)t}-1}{(ia-u)} = -\tfrac{1}{(ia-u)} = \tfrac{1}{(u-ia)} > 0$$

logo

$$Lf\,(u) = \operatorname{Re}\left\{\tfrac{1}{(u-ia)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\tfrac{1}{(u-ia)(u-ia)} \times (u-ia)\right\} = \operatorname{Re}\left\{\tfrac{u+ai}{u^2+a^2}\right\} = \tfrac{u}{u^2+a^2}\square,$$ analogamente para parte imaginaria.

$Lg\,(u) = \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{u-ia}\right\} = \frac{a}{a^2+u^2}$

d) $\quad f\,(t) = \frac{\left(e^t+e^{-t}\right)}{2}$

A transformada de Laplace é dado por:

$$Lf\,(u) = \int_0^\infty f\,(t)\,e^{-ut}dt \iff Lf\,(u)\int_0^\infty \tfrac{e^t+e^{-t}}{2}.e^{-ut}dt = \int_0^\infty \tfrac{e^{(1-u)t}+e^{(1+u)t}}{2}dt = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \tfrac{e^{-(u+u)t}}{2}dt = \lim_{\beta\to\infty}\left[\tfrac{1}{1-u}e^{(1-u)t} - \tfrac{1}{1+u}e^{-(1+u)t}\right]_0^\beta = \lim_{\beta\to\infty}\left[\tfrac{e^{(1-u)\beta}-1}{1-u} - \tfrac{e^{-(1-u)\beta}-1}{1+u}\right] = \lim_{\beta\to\infty}\tfrac{e^{(1-u)\beta}-1}{1-u} - \lim_{\beta\to\infty} - \tfrac{e^{-(1-u)\beta}-1}{1+u} = \tfrac{1}{u-1} - \tfrac{1}{u+1} = \tfrac{2}{1-u^2},$$ para $u > 0\square$

Exercício 2.7

a) $\frac{\Gamma\prime(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$.Aplicando Γ_{10} vem que $\frac{\Gamma\prime(1)}{\Gamma(1)} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right) e^{-t}dt = -\gamma$ por Γ_{11} $\square$.

b) $\frac{\Gamma\prime(2)}{\Gamma(2)} = -\gamma + 1$,derivando Γ_3 e dividindo por $\Gamma(z)$ vem

$$\begin{aligned} \Gamma'(z+1) &= \Gamma(z) + z\Gamma'(z) \iff \frac{\Gamma\prime(z+1)}{\Gamma(z)} = 1 + z\frac{\Gamma\prime(z)}{\Gamma(z)}, \text{fazendo } z = 1 \\ &\iff \frac{\Gamma\prime(z)}{\Gamma(1)} = 1 + z\frac{\Gamma\prime(1)}{\Gamma(1)} \iff \frac{\Gamma\prime(2)}{\Gamma(2)} = 1 - \gamma \quad \square \end{aligned}$$

Exercício 2.9

a) seja $f(t) = e^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)t}$ para $t \geqq 0$ e $f(t) = 0$ para $t < 0$. Mostre que

$$\Phi(w) = \frac{1}{z-w} \quad \text{para } \operatorname{Re}(w) < \operatorname{Re}(z)$$

seja

$L_1 f(w) = \Phi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)t} dt$

$f(t) = e^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)t}$ e $f(t) = 0$ para $t < 0$

$\Phi(w) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{\left(w-\frac{1}{2}\right)t} dt + \int_0^\infty e^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)t} e^{\left(w-\frac{1}{2}\right)t} dt = \int_0^\infty e^{(w-z)t} dt = \frac{1}{z-w}$ $\square$

b) seja $f(t) = t^{s-1} e^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)t}$ para $t \geqq 0$ e $f(t) = 0$ para $t < 0$. Mostre que

$$\Phi(w) = \Gamma(w)(z-w)^{-s} \quad \text{para } \operatorname{Re}(w) < \operatorname{Re}(z)$$

seja

$\Phi(w) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)t} e^{(w-z)t} dt = \int_0^\infty t^{s-1} e^{(w-z)t} dt = \Gamma_5 (z-w)^{-s}$ (ver exercício 2.2 Pg 20)

Exercício 2.13

$F(z) = \varsigma\left(\frac{1}{2} + iz\right)$ .Prove que $F(z) = F(-z)$

Mostremos que $F(z) = F(-z)$

$F(-z) = \varsigma\left(\frac{1}{2} - iz\right) = \varsigma\left(1 - \left(\frac{1}{2} - iz\right)\right) \overset{(*)}{=} \varsigma\left(1 - \left(\frac{1}{2} - iz\right)\right) = \varsigma\left(\frac{1}{2} + iz\right) = F(z)$ $\square$

$(*)$ Utilizando o teorema 2.7

Exercício 2.14

b) Mostre que $\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^z z^{-s} dz.$

seja $f(z) = e^z z^{-s}$. calculemos o integral $\int_c f(z)\, dz$,aplicando o teorema dos residuos.

para $z = 0$ é um polo de ordem s, que esta no interior de c, é facil ver que $Res(f, 0) = \frac{1}{(s-1)!}$ assim:

$\int_c f(z)\, dz = 2\pi i Res(f, 0) \iff \int_c f(z)\, dz = 2\pi i \frac{1}{(s-1)!}$, por Γ_4 tem-se que $\Gamma(s) = (s-1)!$ logo

$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^z z^{-s} dz\square$

c) Prove que para $\mathrm{Re}(1-s) > 0$ obtêm-se

$\int_c e^z z^{-s} dz = 2i \sin \pi s \int_0^\infty e^{-u} u^{-s} du$

do exercício anterior tem-se:

$\int_c e^z z^{-s} dz = 2i\pi \frac{1}{\Gamma(s)}$, multiplicando ambos membros por $\frac{1}{\Gamma(s-1)}$vem que:

$\frac{1}{\Gamma(s-1)}\int_c e^z z^{-s} dz = 2i\pi \frac{1}{\Gamma(s).\Gamma(s-1)}$ utilizando o Γ_5 vem que

$\int_c e^z z^{-s} dz = 2i \sin \pi s \Gamma(s-1)$,por Γ_8 vem que

$\int_c e^z z^{-s} dz = 2i \sin \pi s \int_0^\infty e^{-u} u^{-s} du\square$

Exercício 3.1 Prove a expressão do integral para Φ na proposição 5.4

$\Phi(s) = s\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}} dx$

$$s\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}} dx = s\int_1^\infty \frac{\sum_{p\leq x} \log p}{x^{s+1}} dx = \sum_{p\leq x} s\int_1^\infty \frac{\log p}{x^{s+1}} dx = \sum_{p\leq x} s \log p \int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}} dx =$$

$$= \sum_{p\leq x} s \log p \int_1^\infty x^{-s-1} dx = \sum_{p} s \log p \int_p^\infty x^{-s-1} dx = \sum_{p\leq x} s \log p \left[\frac{x^{-s}}{-s}\right]_p^\infty =$$

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p^s} = \Phi(s)\,\square$$